Feuille de T. D. B1
Nombres complexes

Exercices de cours

(1) Calculer :

a. $a+b \quad ab \quad \frac{a}{b} \quad \frac{b}{a}$ avec $a = 4-i$ et $b = 3+2i$
b. $i^2 \quad i^3 \quad i^4 \quad i^{27} \quad i^{270576}$
c. $(-i)^2 \quad (-i)^3 \quad (-i)^4$
d. $(1+i)^2 \quad (1+i)^3 \quad (1+i)^4 \quad (1+i)^8 \quad (1+i)^{27}$

(2) Démontrer que pour tout complexe non-nul z :

$$z \in \mathbb{U} \iff z^{-1} = \bar{z}$$

(3) Donner la forme algébrique de :

$$z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{2}} \qquad z_2 = 4e^{-i\frac{4\pi}{3}} \qquad z_3 = \sqrt{2}e^{i3\pi}$$

Donner une forme exponentielle de :

$$z_4 = \sqrt{3} - i \quad z_5 = -4i \quad z_6 = 5-5i \quad z_7 = -7$$

(4) Calculer $\left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{24}$.

(5) Retrouver les formules donnant $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Calculer $\cos 4\theta$ et $\sin 4\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ de deux manières différentes : en utilisant la formule de Moivre, puis en utilisant $\cos 4\theta = \cos 2(2\theta)$.

(6) Linéariser $\cos^2 t \sin^2 t$ puis calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \sin^2 t \, dt$$

(7) Résoudre l'équation : $\cos t + \sin t = 1$

Quel est le maximum de la fonction définie par $f(t) = \cos t + \sin t$? En quels points est-il atteint ?

(8) Soit A, B, C, D les quatre points d'affixes respectives $a = -1+i$, $b = 4+3i$, $c = 3-9i$, $d = 1+6i$.

Représenter ces quatre points.

Quelles propriétés ont les triangles ABC et ABD ?

(9) Résoudre les équations suivantes :

a. $z^2 - (1+2i)z - 1 + i = 0$ b. $z^2 - iz - 1 = 0$
c. $z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0$ d. $z + \frac{1}{z} = i\left(\frac{3}{z} - 1\right)$
e. $\begin{cases} z_1 + z_2 = 6i \\ z_1 z_2 = -13 \end{cases}$ f. $z^2 + z - i = 0$

(10) Déterminer et représenter $\mathbb{U}_6$ et $\mathbb{U}_8$.

(11) Résoudre l'équation : $32z^4 = \sqrt{3}i - 1$

(12) Résoudre les équations :

a. $e^z = \sqrt{3} + i$ b. $e^{iz\pi} = 1 - i$
c. $e^{1-z} + e^z = \sqrt{2e}$

Travaux dirigés

1 Donner la forme algébrique des complexes suivants :

$a = (2-5i)^2(-4-i) + 2(-1+7i)(2+3i)(-i)$

$b = \frac{(3+5i)^2}{1-2i}$ $c = \left(1 + \sqrt{3}i\right)^3$

$d = \frac{3+i}{2-i} + \frac{2-i}{3+i}$ $e = \left(\sqrt{2} + \sqrt{5}i\right)^2$

$f = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}i\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i\right)$ $g = 1 + i + i^2 + \cdots + i^{21}$

$h = \sum_{k=1}^{9} \binom{9}{k} (i\sqrt{3})^k$ $j = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} (i)^{2k}(1+i)^{8-k}$

2 Donner une forme exponentielle des complexes suivants :

$a = 3-3i$ $b = -5i$ $c = 3 + \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$d = \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}i\right)\left(-\sqrt{6} + \sqrt{6}i\right)$ $e = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$

3 Calculer les nombres complexes suivants :

$a = e^{i\frac{\pi}{6}} + ie^{i\frac{\pi}{3}}$ $b = \frac{(4+3i)(3+4i)}{(4-3i)(3-4i)}$ $c = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

$d = \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i\right)^3 \left(\frac{5}{6} - \frac{5}{6}i\right)^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{i}{6}\right)^3 \left(3 - \sqrt{3}i\right)^6$

4 Démontrer la *formule du parallélogramme* :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad |z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$$

puis l'inégalité :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad |z| + |z'| \leqslant |z+z'| + |z-z'|$$

5 Représenter l'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant :

a. $|z+2i| \leqslant 2$ b. $|z+2i| = |z-6|$
c. $\frac{\pi}{6} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$ d. $|z|^2 - 2\,\mathrm{im}\, z = 1$
e. $z^6 \in \mathbb{R}$ f. $\mathrm{Im}\left(z^2\right) \leqslant 2$

6 Linéariser les expressions suivantes.

$a(x) = \cos 2x \sin^2 x$ $b(x) = \cos^2 2x \sin 4x$
$c(x) = \cos^4 x$ $d(x) = \cos 4x \sin 3x$
$e(x) = \sin^2 x \sin 3x$ $f(x) = \cos x \cos 2x \cos 3x$
$g(x) = \cos^3 x \sin^2 x$ $h(x) = \cos x \sin^5 x$

7 Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1=\int_0^{\pi}\sin t\,dt \qquad I_2=\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt$$

$$I_3=\int_0^{\pi}\sin^3 t\,dt \qquad I_4=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos 4t\sin 3t\,dt$$

$$I_5=\int_{\pi}^{2\pi}\cos^4 t\,dt \qquad I_6=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin^2 t\sin 3t\,dt$$

$$I_7=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)dt$$

$$I_8=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos t\sin^5 t\,dt \qquad I_9=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2t\sin^2 3t\,dt$$

$$I_{10}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t\,dt \qquad I_{11}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 t\,dt.$$

8 Calculer les sommes suivantes, avec x réel fixé.

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\sin kx \qquad b_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin kx$$

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\cos^2 kx \qquad d_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos kx}{\cos^k x}$$

9 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

a. $z^2-2iz-1+2i=0$

b. $z^2-(1+3i)z-4=0$

c. $z+\frac{10}{z}=3-2i$

d. $z^4-2z^2\cos\theta+1=0$ (où $\theta\in\mathbb{R}$)

e. $4z^2+8|z|^2-3=0$

f. $(z^2-3z-1)^2+(4z-7)^2=0$

g. $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=1+8ri \end{cases}$

h. $\bar{z}+iz=1$

j. $|z|+iz=1$

k. $2z+3\bar{z}+6|z|^2=65+3i$

l. $|z-4|=|z+2i|$

m. $8+z^6=0$

n. $z^6+(2-i)z^3+2+2i=0$

o. $z^4+7+24i=0$

p. $(1+z)^5=(1-z)^5$

q. $1+2z+2z^2+\cdots+2z^{n-1}+z^n=0$ (où $n\in\mathbb{N}^*$)

r. $(2-z)^n=z^n$ (où $n\in\mathbb{N}^*$)

10 Soit $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+jy+j^2z=e^{i\frac{\pi}{3}} \\ x+j^2y+jz=e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

11 À tout point M d'affixe z différente de 1 on associe le point M' d'affixe $z'=\frac{z-1}{1-\bar{z}}$.

a. Démontrer que $\frac{z'-1}{z-1}$ est réel et que $\frac{z'+1}{z-1}$ est imaginaire pur.

b. En déduire une construction géométrique du point M' connaissant le point M.

c. Quel est le module de z' ?

12 Soit z un complexe différent de 1.

À quelle condition nécessaire et suffisante le complexe $\frac{z+1}{z-1}$ est-il réel ? Imaginaire pur ? De module 1 ?

Résoudre cet exercice par le calcul puis par la géométrie.

13 Soit z un complexe non-nul et différent de 1, et A, B, C les points d'affixes respectives z, z^2 et z^3.

a. Démontrer que A, B, C sont alignés si et seulement si z est réel.

b. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si z admet -1 pour partie réelle.

c. Donner de même une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle ABC soit rectangle en B.

14 Quel est l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que

a. les points d'affixes z, z^2 et z^4 soient alignés ?

b. les points d'affixes z, $\frac{1}{z}$ et $(z-i)$ soient alignés ?

15 Soit n un entier naturel strictement positif.

a. Soit p et q deux réels.
Déterminer le module de $e^{ip}-e^{iq}$.

b. En déduire la distance entre deux racines n-èmes de l'unité consécutives.

c. Calculer le périmètre puis l'aire du polygone régulier formé par les racines n-èmes de l'unité.

d. Donner les limites du périmètre et de l'aire calculés précédemment lorsque n tend vers $+\infty$.

16 Soit $\mathcal{C}$ un cercle du plan complexe de centre Ω et de rayon R. Soient A et B deux points de $\mathcal{C}$ distincts. On note ω, a et b les affixes respectives de Ω, A et B.

a. Justifier qu'il existe des réels α et β tels que :

$$a-\omega=Re^{i\alpha} \qquad \text{et} \qquad b-\omega=Re^{i\beta}$$

b. Démontrer que si M est un point de $\mathcal{C}$ d'affixe z différente de a alors :

$$\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right)=2\arg\left(\frac{b-z}{a-z}\right)$$

Quel théorème a-t-on démontré ?

17 Soit A, B, C trois points d'affixes respectives a, b, c. Soit A', B', C' les milieux des côtés opposés aux points A, B, C.

Soit G le point d'affixe $g = \frac{1}{3}(a+b+c)$, appelé *centre de gravité* du triangle ABC.

a. Démontrer que A, A', G sont alignés, de même que B, B', G et C, C', G.

b. En déduire que G est l'intersection des trois médianes du triangle ABC, *i.e.,* des droites reliant les points de ce triangle au milieu de leurs côtés opposés.

N. B. Dans les exercices suivants les triangles sont notés dans le sens direct, c'est-à-dire que la notation ABC sous-entend que l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est orienté dans le sens direct.

18 Soit A, B, C trois points d'affixes respectives a, b, c. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Démontrer que la triangle ABC est équilatéral si et seulement si :

$$a + jb + j^2c = 0.$$

19 En utilisant les résultats des deux exercices précédents, démontrer le théorème suivant, appelé *Théorème de Napoléon* :

Soit ABC un triangle. On construit les points A', B', C', U, V, W tels que :

- $A'CB$, ACB' et $AC'B$ sont les triangles équilatéraux extérieurs à ABC
- U, V et W sont les centres de gravité respectifs de ces triangles.

Alors le triangle UVW est équilatéral.