Lycée Bellevue – Toulouse **20 septembre 2024**
MPSI – Mathématiques

Devoir Surveillé n°1

Durée : 3 heures – Calculatrices non autorisées

Les recommandations suivantes sont valables pour tous les Devoirs Surveillés et Devoir à la Maison.

Il sera tenu grand compte de la qualité de la rédaction lors de la correction. Il est demandé de faire des phrases complètes dans lesquelles ni l'orthographe ni la ponctuation ne sont négligées.

Les réponses doivent être compréhensibles par tous. Toute assertion doit être justifiée. Le raisonnement doit être rédigé au moyen d'adverbes tels que "donc", "comme". *Les symboles mathématiques tels que* $\forall$ *et* $\Rightarrow$ *ne doivent pas figurer dans une phrase, à l'exception parfois du signe =. Tout élément introduit doit être présenté correctement :* Soit x un réel....

Les références au cours doivent être clairement et complètement énoncées. Lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment, il est demandé d'indiquer le numéro de la question utilisée.

Il est inutile de recopier l'énoncé.

Il est aussi demandé d'utiliser des copies doubles, de laisser une marge au correcteur, d'encadrer les résultats finaux, de numéroter les copies (et non les pages) en indiquant leur nombre total. Les annotations au crayon à papier ne seront pas prises en compte.

Les exercices et problèmes sont indépendants et peuvent donc être traités dans le désordre. Dans un exercice avec plusieurs questions, on peut admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

Certaines questions sont difficiles, ce qui n'empêche pas de s'y attaquer : il est possible de gagner des points même avec une partie de la réponse. Et si la question n *paraît difficile, peut-être la réponse de la question* $n-1$ *peut-elle aider.*

Si un élève est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le barème est parfois donné à titre indicatif, il peut être légèrement modifié lors de la correction.

Exercices. *(8 points)*

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+6}=1$

2. Déterminer le cosinus, le sinus et la tangente de $\theta = \dfrac{5\pi}{8}$.

3. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\tan\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$

4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \leqslant \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$

Problème 1. *(7 points)*

1. Pour tout entier naturel n on pose :

$$A_n = \sum_{k=1}^{2n} k \qquad\qquad B_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k.$$

   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad A_n + B_n = 4\sum_{k=1}^{n} k.$

   (b) En déduire une expression de B_n sans signe somme.

2. Pour tout entier naturel n on pose :

$$C_n = \sum_{k=1}^{2n} k^2 \qquad\qquad D_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2.$$

   (a) Calculer D_0, D_1, D_2, D_3.

   (b) Donner une formule factorisée pour C_n puis pour $C_n + D_n$.

   (c) En déduire une formule pour D_n.

3. En s'inspirant de la méthode utilisée ci-dessus, calculer : $\quad F_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^3.$

Problème 2. *(12 points)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit l'équation :

$$(E_n) \qquad \sin(x) - \sin(3x) + \sin(5x) + \cdots - (-1)^n \sin((2n-1)x) = 0$$

En multipliant par (-1) on peut écrire :

$$(E_n) \quad \iff \quad -S_n(x) = 0 \qquad \text{avec} \qquad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin((2k-1)x).$$

1. (a) Déterminer une expression de $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$.

   (b) Résoudre l'équation (E_2).

2. (a) Exprimer $\sin(x) + \sin(5x)$ comme produit de deux fonctions trigonométriques.

   (b) En déduire les solutions de l'équation (E_3).

3. Démontrer que si $\cos x = 0$ alors x n'est pas solution de (E_n).
   On pourra utiliser une formule de somme : $\sin((2k-1)x) = \sin(2kx - x) = \cdots$

4. (a) Exprimer $\cos(x)\sin((2k-1)x)$ comme somme de deux fonctions trigonométriques.

   (b) En déduire une expression de $\cos x \times S_n(x)$ sans signe somme.
   On fera bien apparaître les étapes de calcul.

5. Une variante de la question précédente.
   Soit x tel que $\cos(x) \neq 0$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n(x) = (-1)^n \frac{\sin(2nx)}{2\cos x}.$$

6. Résoudre l'équation (E_n) dans le cas général.