Corrigé du Devoir Surveillé n°1

Exercices. *(8 points)*

1. *(2 points)* On note (E) l'équation : $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x+6} = 1$

   Cette équation est définie si et seulement si $2x+5 \geqslant 0$ et $x+6 \geqslant 0$, donc si et seulement si $x \geqslant -\frac{5}{2}$ et $x \geqslant -6$, ce qui équivaut à $x \geqslant -\frac{5}{2}$.
   Son ensemble de définition est donc $\mathcal{D} = \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right[$.
   Tout d'abord, pour tout $x \in \mathcal{D}$:

   $$(E) \quad\iff\quad \sqrt{2x+5} = \sqrt{x+6} + 1$$

   Les termes sont positifs donc :

   $$\begin{aligned}(E) \quad&\iff\quad 2x+5 = \left(\sqrt{x+6}+1\right)^2 = x+7+2\sqrt{x+6}\\ &\iff\quad x-2 = 2\sqrt{x+6}\end{aligned}$$

   Ensuite :

   $$\begin{aligned}(E) \quad&\implies\quad (x-2)^2 = 4(x+6)\\ &\iff\quad x^2-8x-20 = 0.\end{aligned}$$

   Les solutions de cette équation du second degré sont $x = 10$ et $x = -2$.
   Comme $\sqrt{25} - \sqrt{16} = 1$ alors 10 est bien solution.
   Comme $\sqrt{1} - \sqrt{4} = -1 \neq 1$ alors -2 n'est pas solution.
   Finalement l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\mathcal{S} = \{10\}$.

2. *(2 points)* Soit $\theta = \frac{5\pi}{8}$. Alors $2\theta = \frac{5\pi}{4}$ donc $\cos 2\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui donne :

   $$2\cos^2\theta - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

   On en déduit :

   $$\cos^2\theta = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \qquad \text{puis} \qquad \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

   Comme $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ alors $\cos\theta < 0$ et $\sin\theta > 0$, donc

   $$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

   Finalement :

   $$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = -\sqrt{2} - 1.$$

3. *(2 points)* Posons $h = x - \frac{\pi}{3}$. Alors $x = h + \frac{\pi}{3}$ et :

$$\frac{\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)}{\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\tan\left(2h + \frac{\pi}{2}\right)}{\tan\left(h + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

On vérifie que $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan x}$, on connaît la formule $\tan(2h) = \frac{\tan h}{1-\tan^2 h}$, donc :

$$\frac{\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)}{\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\tan h}{\tan(2h)} = \frac{1 - \tan^2 h}{2}.$$

Finalement :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)}{\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1 - \tan^2 h}{2} = \frac{1}{2}.$$

4. *(2 points)* Pour tout $n \in \mathbb{N}$ notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$.

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
<u>Initialisation.</u> La somme $\sum_{k=1}^{0} \sqrt{k}$ est vide donc elle est nulle, et $\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$ est nul pour $n = 0$, donc la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
<u>Hérédité.</u> Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est nulle pour un certain entier naturel n. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \sqrt{k} = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} + \sqrt{n+1} \leqslant \frac{4n+3}{6}\sqrt{n} + \sqrt{n+1}.$$

On cherche à démontrer que :

$$\frac{4n+3}{6}\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leqslant \frac{4(n+1)+3}{6}\sqrt{n+1} = \frac{4n+7}{6}\sqrt{n+1}.$$

On raisonne par équivalences :

$$\frac{4n+3}{6}\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leqslant \frac{4n+7}{6}\sqrt{n+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (4n+3)\sqrt{n} \leqslant (4n+1)\sqrt{n+1}$$

Tous les termes sont positifs donc :

$$\frac{4n+3}{6}\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leqslant \frac{4n+7}{6}\sqrt{n+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (4n+3)^2 n \leqslant (4n+1)^2(n+1)$$

On calcule :

$$(4n+3)^2 n = 16n^3 + 24n^2 + 9n \qquad \text{et} \qquad (4n+1)^2(n+1) = 16n^3 + 24n^2 + 9n + 1$$

Donc :

$$\frac{4n+3}{6}\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leqslant \frac{4n+7}{6}\sqrt{n+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \leqslant 1.$$

La proposition $0 \leqslant 1$ est vraie donc par équivalence :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \sqrt{k} \leqslant \frac{4n+7}{6}\sqrt{n+1}.$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
L'hérédité est démontrée.
<u>Conclusion.</u> Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Problème 1. *(7 points)*

1. (a) *(1 point)* Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité :

$$A_n + B_n = \sum_{k=1}^{2n} k + \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k = \sum_{k=1}^{2n} \Big(1 + (-1)^k\Big) k.$$

On remarque que :

$$1 + (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ 2 & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

On en déduit :

$$A_n + B_n = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} 2k.$$

Les entiers pairs de 1 à $2n$ sont les $2j$ pour j allant de 1 à n donc :

$$A_n + B_n = \sum_{j=1}^{n} 2(2j) = \sum_{j=1}^{n} 4j.$$

Par linéarité et en remplaçant la variable muette j par k :

$$A_n + B_n = 4 \sum_{k=1}^{n} k.$$

(b) *(1 point)* La formule donnant la somme des n premiers entiers donne :

$$A_n + B_n = 4 \frac{n(n+1)}{2} = 2n(n+1).$$

De même :

$$A_n = \sum_{k=1}^{2n} k = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1).$$

Par soustraction :

$$B_n = (A_n + B_n) - A_n = n[2(n+1) - (2n+1)] = n.$$

2. (a) *(1 point)* On obtient :

$$D_0 = 0 \qquad D_1 = -1 + 4 = 3 \qquad D_2 = -1 + 4 - 9 + 16 = 10$$
$$D_3 = -1 + 4 - 9 + 16 - 25 + 36 = 21.$$

(b) *(2 points)* La formule donnant la somme des n premiers carrés donne :

$$C_n = \sum_{k=1}^{2n} k^2 = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$$

En utilisant la même méthode que dans la question précédente :

$$C_n + D_n = \sum_{k=1}^{2n} k^2 + \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{2n} \Big(1 + (-1)^k\Big) k^2 = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} 2k^2.$$

Ceci donne :

$$C_n + D_n = \sum_{k=1}^{n} 2(2k)^2 = 8\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Ainsi :

$$C_n + D_n = 8\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

(c) *(1 point)* Par soustraction :

$$\begin{aligned} D_n = (C_n + D_n) - C_n &= \frac{4n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3} \\ &= \frac{n(2n+1)[4(n+1) - (4n+1)]}{3} \\ &= n(2n+1). \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad D_n = n(2n+1).$$

On peut vérifier que cette formule est correcte pour n allant de 0 à 3.

3. *(1 point)* Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$E_n = \sum_{k=1}^{2n} k^3 \qquad\qquad F_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^3.$$

De même que dans les questions précédentes :

$$E_n + F_n = \sum_{k=1}^{2n} \Big(1 + (-1)^k\Big) k^3 = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} 2k^3$$

Ainsi :

$$E_n + F_n = \sum_{k=1}^{n} 2(2k)^3 = 16\sum_{k=1}^{n} k^3.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} F_n = (E_n + F_n) - E_n &= 16\sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{2n} k^3 \\ &= 16\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{2n(2n+1)}{2}\right)^2 \\ &= 4n^2(n+1)^2 - n^2(2n+1)^2 \\ &= n^2(4n+3). \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad F_n = n^2(4n+3).$$

Problème 2. *(12 points)*

1. (a) *(1 point)* Grâce aux formules d'addition et de duplication :

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(2x+x) = \sin(2x)\cos x + \cos(2x)\sin x\\ &= 2\sin x\cos^2 x + \left(1-2\sin^2 x\right)\sin x\\ &= 2\sin x\left(1-\sin^2 x\right) + \sin x - 2\sin^3 x\\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x.\end{aligned}$$

(b) *(1 point)* L'équation (E_2) est : $\quad -\sin x + \sin(3x) = 0$.
D'après la question précédente elle équivaut à :

$$\begin{array}{lll}(E_2) & \iff & 2\sin x - 4\sin^3 x = 0\\ & \iff & \sin x\left(1-2\sin^2 x\right) = 0\\ & \iff & \sin x\cos(2x) = 0\\ & \iff & \sin x = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(2x) = 0\\ & \iff & x = k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{avec} \quad k\in\mathbb{Z}\\ & \iff & x = k\pi \quad \text{ou} \quad x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \quad \text{avec} \quad k\in\mathbb{Z}\end{array}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est donc :

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ k\pi, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k\in\mathbb{Z} \right\}.$$

2. (a) *(0,5 point)* La formule $\quad \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \quad$ donne :

$$\sin(x) + \sin(5x) = 2\sin(3x)\cos(2x).$$

(b) *(1,5 points)* Par équivalences :

$$\begin{array}{llll}(E_3) & \iff & \sin x - \sin(3x) + \sin(5x) = 0 & \\ & \iff & \sin(3x)(2\cos(2x)-1) = 0 & \\ & \iff & \sin(3x) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(2x) = \dfrac{1}{2} & \\ & \iff & 3x = k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi & \text{avec} \quad k\in\mathbb{Z}\\ & \iff & x = k\dfrac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi & \text{avec} \quad k\in\mathbb{Z}\end{array}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E_3) est :

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ k\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z} \right\}.$$

On peut remarquer que :

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ k\frac{\pi}{6} \;\middle|\; k\in\mathbb{Z} \right\} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z} \right\}.$$

3. *(1 point)* Si $\cos x = 0$ alors $x = \frac{\pi}{2} + m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\sin((2k-1)x) = \sin(2kx - x) = \sin(2kx)\cos x - \cos(2kx)\sin x.$$

On sait que $\cos x = 0$ donc :

$$\sin((2k-1)x) = -\cos(2kx)\sin x = -\cos(k\pi + 2km\pi)\sin x.$$

La fonction sinus est 2π-périodique, et km est un entier donc :

$$\sin((2k-1)x) = -\cos(k\pi)\sin x.$$

Or :

$$\cos(k\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Ainsi $\cos(k\pi) = (-1)^k$ puis :

$$\sin((2k-1)x) = -(-1)^k \sin x.$$

On en déduit :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin((2k-1)x) = -\sum_{k=1}^{n} (-1)^{2k} \sin x = -n\sin x.$$

Comme $\cos x = 0$ alors $\sin x \neq 0$ et donc $S_n(x) \neq 0$.
Ceci montre que x n'est pas solution de l'équation (E_n) si $\cos x = 0$.

4. (a) *(1 point)* La formule $\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$ donne :

$$\cos(x)\sin((2k-1)x) = \frac{1}{2}(\sin(2kx) + \sin(2(k-1)x)).$$

(b) *(2 points)* Par linéarité de la somme et en utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned}
\cos x \times S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos x \sin((2k-1)x) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (-1)^k (\sin(2kx) + \sin(2(k-1)x)) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin(2kx) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin(2(k-1)x)\right).
\end{aligned}$$

Le changement d'indice $\ell = k-1$ dans la seconde somme donne :

$$\cos x \times S_n(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin(2kx) + \sum_{\ell=0}^{n-1} (-1)^{\ell+1} \sin(2\ell x)\right).$$

Comme ℓ est une variable muette alors :

$$\begin{aligned}
\cos x \times S_n(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin(2kx) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \sin(2kx)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin(2kx) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sin(2kx)\right)
\end{aligned}$$

Par télescopage :

$$\cos x \times S_n(x) = \frac{1}{2}((-1)^n \sin(2nx) - \sin(0)) = \frac{(-1)^n}{2} \sin(2nx).$$

5. *(2 points)* Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la propriété :

$$\mathcal{P}_n : \qquad S_n(x) = (-1)^n \frac{\sin(2nx)}{2\cos x}.$$

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation. Comme une somme vide est nulle, et $\sin(0) = 0$, alors la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie :

$$\sum_{k=1}^{0} (-1)^k \sin((2k-1)x) = 0 = \frac{\sin 0}{2\cos 0}.$$

Hérédité. Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned}
S_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \sin((2k-1)x) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin((2k-1)x) + (-1)^{n+1} \sin((2n+1)x) \\
&= (-1)^n \frac{\sin(2nx)}{2\cos x} - (-1)^n \sin((2n+1)x) \\
&= (-1)^n \frac{\sin(2nx) - 2\sin((2n+1)x)\cos x}{2\cos x}
\end{aligned}$$

La formule $\quad \sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)) \quad$ donne :

$$\sin((2n+1)x)\cos x = \frac{1}{2}(\sin(2(n+1)x) + \sin(2nx))$$

Donc :

$$S_{n+1}(x) = (-1)^n \frac{-\sin(2(n+1)x)}{2\cos x} = (-1)^{n+1} \frac{\sin(2(n+1)x)}{2\cos x}$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.
L'hérédité est démontrée.
Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. *(2 points)* L'équation (E_n) équivaut à : $S_n(x) = 0$.
Si $\cos x = 0$ alors x n'est pas solution, d'après la question 3.
Donc tous les réels de la forme $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$, ne peuvent être solutions.
Supposons dorénavant que $\cos x \neq 0$.
Alors d'après la question précédente :

$$(E_n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (-1)^n \frac{\sin(2nx)}{2\cos x} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin(2nx) = 0$$

Donc :

$$(E_n) \quad \Longleftrightarrow \quad 2nx = k\pi \quad \Longleftrightarrow \quad x = k\frac{\pi}{2n} \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Les réels de la forme $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec k entier font partie de ces solutions.
En effet $\frac{\pi}{2} + k\pi = (2k+1)n\frac{\pi}{2n}$ et $(2k+1)n$ est entier.
Or ils ne sont pas solutions. Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_n) est :

$$\mathcal{S}_n = \left\{ k\frac{\pi}{2n} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$