

Devoir à la Maison n°2

1. Démontrer que la fonction cube $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
$$x \longmapsto x^3$$
2. Soit $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction réciproque de φ , appelée fonction *racine cubique*.
$$x \longmapsto \sqrt[3]{x}$$

Démontrer que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais pas en 0.
Donner sa dérivée sur $\mathbb{R}^*$.
3. Démontrer que la fonction racine cubique est strictement croissante.
Attention : cette fonction n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

On définit maintenant la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt[3]{x^3 - 1}.$$

4. (a) Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, donner sa dérivée sur cet ensemble.
(b) Démontrer qu'elle n'est pas dérivable en 1.
5. Compléter la formule $a - b = \frac{a^3 - b^3}{\dots\dots\dots}$ et en déduire que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = x$ pour asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.
Quelle est la position de la courbe de f par rapport à cette asymptote?
6. Tracer la courbe représentative de f , en faisant figurer ses tangentes en 0 et en 1 ainsi que son asymptote.
7. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x .
En déduire que f est bijective et donner sa fonction réciproque.
Ajouter celle-ci à la courbe de f sans étudier de nouvelle fonction.
8. Démontrer que la courbe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = -x$.