Chapitre B2
Ensembles

I. Ensembles

A. Appartenance et inclusion

Définition. Soit E un ensemble. On dit que x est élément de E lorsque x appartient à E. On note $x \in E$. Si x n'appartient pas à E, on note $x \notin E$.

Définition. On appelle ensemble vide et on note $\varnothing$ l'ensemble qui ne contient aucun élément : $\varnothing = \{\}$.

Définitions. Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

(i) On dit que A est inclus dans B et on note $A \subseteq B$ ou $A \subset B$ si tout élément de A est élément de B :

$$\forall a \in E \qquad a \in A \quad \Longrightarrow \quad a \in B$$

(ii) On note $A = B$ si $A \subset B$ et $B \subset A$:

$$\forall a \in E \qquad a \in A \quad \Longleftrightarrow \quad a \in B$$

Remarques.

(i) On démontre souvent l'égalité de deux ensembles par double inclusion.

(ii) L'assertion $A \not\subseteq B$ (A n'est pas inclus dans B) s'écrit :

$$\exists a \in A \qquad a \notin B$$

(iii) Une inclusion $A \subseteq B$ est dite stricte si les deux ensembles sont différents. On note parfois $A \subsetneq B$.

Exemple 1. Les ensembles de nombres habituels vérifient les inclusions strictes suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Définition. Soit E un ensemble. Si A est un ensemble inclus dans E alors on dit que A est un sous-ensemble de E, ou une partie de E.

Notation. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Exemple. Si $E = \{a, b\}$, alors

$\mathcal{P}(E) =$

▷ **Exercice 1.**

Remarques.

(i) Pour toute partie A de E : $\quad \varnothing \subseteq A \subseteq E$

(ii) La relation d'inclusion $\subseteq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$ (voir partie III).
On dit alors que l'ensemble vide est un élément *minimal* et l'ensemble E est un élément *maximal* pour cette relation d'ordre.

B. Opérations sur les parties d'un ensemble

Définitions. Soit A et B deux parties d'un ensemble E. On définit :

$\overline{A} = E \setminus A = \complement_E^A = \{x \in E \mid x \notin A\}$	le complémentaire de A (dans E)
$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$	l'intersection de A et B
$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$	l'union ou la réunion de A et B
$A \setminus B = A - B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$	la différence de A et B.

Proposition - Règles de calcul élémentaires sur les parties d'une ensemble.
On note A, B, C trois parties d'un ensemble E.

Proposition (Lois de De Morgan). *Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Alors :*

$\overline{A \cap B} =$ $\overline{A \cup B} =$

Proposition (Distributivités). *Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E. Alors :*

$A \cap (B \cup C) =$ $A \cup (B \cap C) =$

Démonstration.

Remarque. Soit A et B sont deux parties d'un ensemble E. Alors :

$\forall x \in E \quad (x \in A \cap B \iff \quad)$

$\forall x \in E \quad (x \in A \cup B \iff \quad)$

$\forall x \in E \quad (x \in \overline{A} \iff \quad)$

$A \subseteq B \iff (\forall x \in E \quad)$

$A = B \iff (\forall x \in E \quad)$

▷ **Exercices 2, 3.**

C. Produit cartésien

Définitions. Soit E et F deux ensembles. On appelle produit cartésien de E et de F l'ensemble :

$$E \times F = \{ (x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Un élément (x, y) de $E \times F$ est appelé couple.

Définitions. Soit $E_1, \dots, E_n$ des ensembles. On appelle produit cartésien de ces ensembles l'ensemble :

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid \forall i = 1 \dots n \quad x_i \in E_i\}$$

On appelle n-uplets les éléments de cet ensemble.

Si tous les E_i sont égaux alors on note $E^n = E \times \cdots \times E$.

Exemples.

(i) On connaît déjà les produits cartésiens $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

(ii) Soit $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2\}$. Alors :

$E \times F =$

▷ **Exercice 4.**

II. Applications

A. Généralités

Définition. Soit E et F deux ensembles non-vides. Une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F.

Notation. On note $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble des applications de E dans F.

Définitions. Soit f une application de E dans F.

(i) Si A est une partie de E alors on appelle image de A par f et on note $f(A)$ l'ensemble :

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A\}$$

Il s'agit d'un sous-ensemble de F : $f(A) \subseteq F$.

(ii) Si B est une partie de F alors on appelle image réciproque de B par f et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Il s'agit d'une partie de E : $f^{-1}(B) \subseteq E$.

Remarque. Ainsi la donnée de $f : E \to F$ permet de définir deux nouvelles fonctions :

$$f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F) \qquad \text{et} \qquad f^{-1} : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E).$$

La première ne doit pas être confondue avec la fonction f de départ, même si par abus elle est notée de la même façon.

La seconde est définie même si f n'est pas bijective, et dans le cas où f est bijective il ne faut pas la confondre avec la réciproque de f.

Exemple 2. Pour la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$

$f([0,\pi]) =$	$f^{-1}([0,1]) =$
$f(\mathbb{R}) =$	$f^{-1}(\{2\}) =$

Remarque. Soit $x \in E$ et $y \in F$. Alors :

$$y \in f(A) \iff$$

$$x \in f^{-1}(B) \iff$$

▷ **Exercice 5.**

B. Injections, surjections, bijections

1) Injection

Définition. Une fonction $f : E \to F$ est une injection, ou est injective, si :

Proposition. *Une fonction $f : E \to F$ est injective si et seulement si tout élément de F possède au plus un antécédent.*

Démonstration.

Exemple 3.

(i) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ sont injectives.

(ii) Id_E est injective.

(iii) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas injective $\qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est injective.

(iv) $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas injective.

Proposition. *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont injectives alors $g \circ f$ est injective.*

Démonstration.

2) Surjection

Définition. Une fonction $f : E \to F$ est une surjection, ou est surjective, si tout élément de F possède (au moins) un antécédent :

Exemple 3 (suite).

(i) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective, $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est surjective.

(ii) Id_E est surjective.

(iii) $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas surjective $\qquad \begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est surjective.

(iv) $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective.

Remarque. Une application peut être à la fois injective et surjective, ou ni injective ni surjective, etc.

Proposition. *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.*

Démonstration.

▷ **Exercice 6.**

3) Bijection

Définition. Une fonction $f : E \to F$ est une bijection, ou est bijective, si elle est injective et surjective.

De façon équivalente, f est bijective si tout élément de F possède un et un seul antécédent par f :

Exemple 3 (suite).

(i) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas bijective (alors que $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ l'est).
$\ln \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est bijective.

(ii) Id_E est bijective.

(iii) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas bijective $\quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est bijective.

Proposition. *La composée de deux bijections est une bijection.*

Démonstration. Cette propriété est conséquence des deux propriétés ci-dessus. $\square$

Définition. Soit $f : E \to F$ une bijection. On appelle fonction réciproque de f et on note f^{-1} la fonction de F dans E qui à tout $y \in F$ associe son antécédent par f.

Remarque. Ainsi :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in F \qquad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

$f^{-1} \circ f =$ $\qquad$ $f \circ f^{-1} =$

Exemple 3 (suite).

(i) La réciproque de la fonction ln est la fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.

(ii) La réciproque de Id_E est Id_E.

(iii) La réciproque de $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est la fonction racine carrée $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$

Théorème. *Soit $f : E \to F$ une fonction. Alors f est bijective si et seulement si il existe une fonction $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.*
Dans ce cas g est la réciproque de f : $g = f^{-1}$.

Démonstration.

Remarques.

(i) Ce théorème implique que si f est bijective alors il existe une *unique* application g telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

(ii) Si f est bijective alors f^{-1} est bijective, et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Méthode. Trois possibilités pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective et obtenir sa réciproque :

1. On résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x, où $y \in F$ est fixé.
   On obtient $x = f^{-1}(y)$. En effet, si on montre que pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ admet une et une seule solution, alors f est bijective et x est l'antécédent de y par f donc $x = f^{-1}(y)$.
2. Si on exhibe une fonction $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, alors par théorème f est bijective et $g = f^{-1}$.
3. Si E est un intervalle de $\mathbb{R}$ et F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ alors on peut appliquer le théorème de la bijection, voir ci-dessous.

Exemple 4. *(i)* $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 5-3x \end{array}$ *(ii)* $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$

Proposition. (Complète la précédente) *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux bijections alors $g \circ f$ est bijective et sa réciproque est :*

Démonstration.

Exemple 5.

(i) Soit α un réel non-nul. Alors la fonction $x \mapsto x^\alpha$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même, de réciproque $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$.

(ii) Soit n un entier positif impair. Alors la fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Sa réciproque est la racine n-ème $x \mapsto x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, définie sur $\mathbb{R}$.

▷ **Exercice 7.**

C. Cas des fonctions réelles

Dans cette partie on suppose que E et F sont des parties de $\mathbb{R}$.

Remarque. Soit $f : E \to F$ une bijection.
Alors les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice des axes.

Exemple 6. Fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

Remarque. Soit $f : E \to F$ une fonction. Alors :

- Un réel y admet au moins un antécédent si et seulement si il appartient à $f(E)$, l'image de E par f.
  On peut définir la fonction $\hat{f} : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & f(E) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$, que l'on note souvent f par abus.
  Celle-ci est surjective.
- Si f est strictement monotone alors f est injective.

Démonstration du second point. Si f est strictement monotone alors :

Ainsi f est injective. $\square$

Théorème de la bijection. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*
Si f est continue et strictement monotone alors :

- *$f(I)$ est un intervalle.*
- *f réalise une bijection de I dans $f(I)$.*

De plus, en notant $J = f(I)$, la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est bijective, continue, strictement monotone de même sens que f.

Exemple. La fonction ln réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
Sa réciproque est la fonction exp, elle réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. Si y et y' sont deux éléments de $f(I)$ alors il existe x et x' dans I tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.

Soit d compris entre y et y'. Comme I est un intervalle et f est continue alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in I$ tel que $d = f(c)$. Ceci montre que $d \in f(I)$.

Ceci démontre que $f(I)$ est un intervalle.

Le fait que $f : I \to f(I)$ est bijective est conséquence de la remarque précédente : f est injective car f est strictement monotone et f est surjective par définition de $f(I)$.

Le fait que $f^{-1} : J \to I$ est bijective a déjà été justifié, sa continuité sera démontrée plus tard, sa monotonie est immédiate. □

Remarque. L'intervalle J est déterminé grâce aux limites de f aux bornes de I. Par exemple :

- Si $I = [a, b]$ et f est croissante alors $J =$
- Si $I = [a, b]$ et f est décroissante alors $J =$
- Si $I = [a, b[$ et f est croissante alors $J =$
- etc.

Théorème de la bijection, suite. *Soit $f : I \to J$ une fonction bijective et dérivable. Alors f^{-1} est dérivable sur*

$$J' = \left\{ y \in J \mid f' \circ f^{-1}(y) \neq 0 \right\}$$

et sa dérivée est :

Méthode pour retrouver la formule. On sait que pour tout $x \in J$: $f \circ f^{-1}(x) = x$. Par dérivation :

Remarque. Si la dérivée s'annule en x_0 alors la fonction réciproque n'est pas dérivable en $y_0 = f(x_0)$.

Exemple 7. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array}$

III. Relations binaires

A. Définition

Définition. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une partie de $E \times E$. Au lieu de noter $(x, y) \in \mathcal{R}$ on note $x\mathcal{R}y$.

En d'autres termes, deux éléments de E peuvent être reliés ou non.

On peut aussi définir une relation binaire comme une application :

$$\mathcal{R} : E \times E \to \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$$

On note $x\mathcal{R}y$ si $\mathcal{R}(x, y)$ est vrai.

Exemple.

- Les relations $=$ $<$ $>$ $\leqslant$ $\geqslant$ sont des relations binaires sur $\mathbb{R}$.
- Les relations $=$ $\subset$ sont des relations binaires sur $\mathcal{P}(E)$.
- Les relations $\mid$ (divise) et $\equiv$ modulo 5 sont des relations binaires sur $\mathbb{Z}$.

B. Relation d'équivalence

Définition. Une relation d'équivalence sur un ensemble est une relation binaire

- réflexive :
- symétrique :
- transitive :

Exemple 8.

(i) La relation d'égalité sur les réels est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

(ii) La relation de congruence modulo 5 est définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \qquad m \equiv n \quad [5] \qquad \iff \qquad 5 \mid (m - n)$$

C'est une relation d'équivalence.

(iii) On définit de même la relation de congruence modulo un réel sur $\mathbb{R}$.

Définition. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E, et x est un élément de E, on appelle classe d'équivalence de x l'ensemble de tous les éléments y de E tels que $x\mathcal{R}y$.

Exemples.

(i) Pour la relation d'égalité sur les réels, les classes d'équivalence sont les singletons $\{x\}$ pour x parcourant $\mathbb{R}$.

(ii) Pour la relation de congruence modulo 5 les classes d'équivalence sont au nombre de 5, on peut les noter $\left\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\right\}$.

(iii) Soit E l'ensemble des élèves du lycée. La relation «est dans la même classe que» est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence sont

(iv) Soit E l'ensemble des stylos et crayons d'une trousse. Alors la relation «écrit de la même couleur que» est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence sont

(v) Soit $\mathcal{E}$ la classe de tous les ensembles finis. Alors la relation «avoir le même nombre d'éléments que» est une relation d'équivalence sur $\mathcal{E}$.

Les classes d'équivalence sont

Proposition. *L'ensemble des classes d'équivalence de E forme une partition de E.*

Définition. Soit E un ensemble, et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E.

On dit que cette famille est une partition de E si :

(i) Les A_i sont disjoints : $\forall (i,j) \in I^2 \qquad i \neq j \quad \Longrightarrow \quad A_i \cap A_j = \varnothing$

(ii) Les A_i couvrent E tout entier : $\bigcup_{i \in I} A_i = E$

Remarque. Dans ce cas tout élément a de A appartient à un unique A_i :

$$\forall a \in E \qquad \exists! i \in I \quad a \in A_i$$

▷ **Exercice 8.**

C. Relation d'ordre

Définition. Une relation d'ordre sur un ensemble est une relation binaire

- réflexive :
- antisymétrique :
- transitive :

Exemple 9.

(i) La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

(ii) Soit E un ensemble. La relation d'inclusion $\subseteq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.

(iii) La relation de divisibilité $\mid$ sur $\mathbb{N}$:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2 \qquad a \mid b \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad b = ka$$

est une relation d'ordre.

Définitions. Une relation d'ordre est dite totale si deux éléments peuvent toujours être comparés :

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad x\mathcal{R}y \quad \text{ou} \quad y\mathcal{R}x$$

Sinon elle est dite partielle.

Exemple 9 (suite). Parmi les trois relations d'ordre données ci-dessus, celles qui sont totales sont :

Définitions. Soit $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur un ensemble E.

Soit A une partie de E et m un élément de E. On dit que :

(i) m est un majorant de A pour la relation $\preccurlyeq$ si : $\forall a \in A \quad a \preccurlyeq m$

Si de plus m appartient à A alors m est le maximum de A pour la relation $\preccurlyeq$.

On dit aussi que m est le plus grand élément de A pour la relation $\preccurlyeq$.

(ii) On définit de même un minorant et le minimum ou plus petit élément.

Remarques.

(i) Si une partie est majorée alors elle n'admet pas forcément de maximum.

(ii) Si une partie admet un maximum alors il est unique, par antisymétrie.

Exemples. Soit E un ensemble.

(i) Alors $\mathcal{P}(E)$ possède un minimum et un maximum pour la relation $\subseteq$.

Le minimum est ☐ et le maximum est ☐

(ii) Soit A et B deux parties de E. Alors le couple $\{A, B\}$ est une partie de $\mathcal{P}(E)$.

Cette partie admet pour majorant ☐

et pour minorant ☐

Exemple. L'ensemble $\mathbb{N}$ est muni de la relation d'ordre de divisibilité.

Alors $\mathbb{N}$ admet un minimum et un maximum pour cette relation.

Le minimum est ☐ et le maximum est ☐

$\triangleright$ **Exercice 9.**