TD. B3
Ensembles

Exercices de cours

(1) Décrire $\mathscr{P}(E)$ si $E = \{a, b, c\}$.

(2) Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Démontrer que :

a. $A \cup B = A \iff B \subseteq A$

b. $A \cap B = A \iff A \subseteq B$

(3) Démontrer que
$$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
et que cette dernière union est disjointe, *i.e.*, que :
$$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$$

(4) Déterminer $F \times E$, E^2 et F^3 où :
$$E = \{a, b, c\} \quad \text{et} \quad F = \{1, 2\}$$

(5) Soit f une application de E dans F.

a. Démontrer que pour toute partie A de E :
$$A \subseteq f^{-1}(f(A))$$

b. Démontrer que pour toute partie B de F :
$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$$

c. Grâce à l'exemple de la fonction $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, démontrer que les inclusions ci-dessus sont en général strictes.

(6) Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Démontrer que si f est strictement monotone alors f est injective.

(7) On note $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+2i}{2+ix} \end{array}$

a. Justifier que la fonction f est bien définie.

b. Démontrer que f est injective.

c. Démontrer que f n'est pas surjective.

(8) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = e^{x^2} - 1$.

a. Déterminer trois bijections simples f_1, f_2, f_3 telles que $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

b. En déduire que f est bijective et donner son application réciproque.

(9) Par définition la fonction exponentielle est la réciproque de la fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

Démontrer qu'elle est dérivable et retrouver sa dérivée.

(10) Sur l'ensemble $\mathbb{C}^*$ on définit la relation $\sim$ par : $z \sim z'$ si et seulement si $\frac{z'}{z} \in \mathbb{R}_+^*$.

a. Justifier que $\sim$ est une relation d'équivalence.

b. Quelles sont les classes d'équivalences ?

(11) Écrire toutes les permutations de $\{a, b\}$, puis de $\{a, b, c\}$, puis de $\{a, b, c, d\}$.

Travaux dirigés

1 Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E.

a. Que peut-on dire si $A \cap B = A \cup B$?

b. Donner une condition nécessaire et suffisante en termes d'inclusions pour avoir l'égalité $A \cup B = B \cap C$.

c. Démontrer que si $A \cap C = B \cap C$ et $A \cup C = B \cup C$ alors $A = B$.

2 Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de parties de $\mathbb{R}$.

a. Soit x un réel. Compléter :
$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \iff ??? \quad x \in A_n$$
$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \iff ??? \quad x \in A_n$$

b. Simplifier :
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right[\qquad \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, 1\right]$$

3 Soit E, F et G trois ensembles, et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications. Démontrer que :

a. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

b. Si $g \circ f$ est injective et f est surjective alors g est injective.

c. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

d. Si $g \circ f$ est surjective et g est injective alors f est surjective.

e. Donner un exemple où $g \circ f$ est bijective, mais f n'est pas surjective et g n'est pas injective.

4 Soit E, F, G et H quatre ensembles, et
$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$$
trois applications.

Démontrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives alors f, g et h le sont aussi.

$\boxed{5}$ Démonter que chacune des fonctions suivantes est bien définie et bijective. Donner sa réciproque.

$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & 2e^{(3\ln x - 5)} \end{array}$ $\quad f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3 - x \end{array}$

$f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(e^x - 1) \end{array}$ $\quad f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ x & \longmapsto & \frac{x-3}{x-2} \end{array}$

$f_5 : \begin{array}{rcl}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\frac{1-x}{1+x} \end{array}$ $\quad f_6 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \frac{1}{x} \end{array}$

$\boxed{6}$ On note $f : \begin{array}{rcl}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x. \end{array}$

a. Démontrer que f est bijective.

   On note arctan l'application réciproque de f et on appelle *arc-tangente* cette fonction .

b. Démontrer que arctan est dérivable et calculer sa dérivée.

$\boxed{7}$ Les applications suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ?

$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$ $\quad f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$

$f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 6x + 2 \end{array}$ $\quad f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^2 - 2z - i \end{array}$

$f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \end{array}$

$f_6 : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + 2\bar{z} \end{array}$ $\quad f_7 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy^2 \end{array}$

$f_8 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$ $\quad f_9 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, xy) \end{array}$

$f_{10} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (4x - 6y, 9y - 6x) \end{array}$

$\boxed{8}$ Démontrer que l'application suivante est bijective.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ (m,n) & \longmapsto & 2^m(2n+1) \end{array}$$

$\boxed{9}$ Soit a, b, c, d quatre complexes avec c non-nul et $ad \neq bc$.

On pose : $\quad f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$

a. Donner l'ensemble de définition de f, que l'on note C_1.

b. Démontrer que $f : C_1 \to \mathbb{C}$ est injective.

c. Calculer l'image de C_1 par f, qui l'on note C_2 : $C_2 = f(C_1)$.

d. Justifier que f réalise une bijection de C_1 dans C_2. Calculer sa réciproque.

$\boxed{10}$ Soit E un ensemble, et A une partie de E.

On définit l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(A) \\ X & \longmapsto & X \cap A \end{array}$

a. Démontrer que f est surjective.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective.

$\boxed{11}$ Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. On définit l'application :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

Démontrer que :

a. f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

b. f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

$\boxed{12}$ Soit E un ensemble. Démontrer qu'il n'existe pas d'application surjective f de E dans $\mathscr{P}(E)$.

Pour ceci considérer la partie :

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$$

$\boxed{13}$ Soit E et F deux ensembles, et f une application de E dans F. Soit B, B' deux parties de F.

Démontrer :

a. Si $B \subseteq B'$ alors $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(B')$.

b. $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

c. $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.

d. $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$.

$\boxed{14}$ Soit E et F deux ensembles, et f une application de E dans F. Soit A, A' deux parties de E.

Démontrer :

a. Si $A \subseteq A'$ alors $f(A) \subseteq f(A')$.

b. $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$.

c. Si f est injective alors $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

d. $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.

e. Si f est injective alors $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

f. Si f est surjective alors $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.

$\boxed{15}$ La relation de congruence modulo π est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$x \equiv y \quad [\pi] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists k \in \mathbb{Z} \quad x - y = k\pi$$

a. Démontrer que cette relation est une relation d'équivalence.

b. Quelle est la classe d'équivalence d'un réel x_0 ?

$\boxed{16}$ Soit $\mathscr{E}$ la classe de tous les ensembles finis.

Pour deux ensembles finis E et F on note $E \sim F$ s'il existe une bijection de E dans F.

a. Démontrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{E}$.

b. Quelles sont les classes d'équivalences ?

$\boxed{\textbf{17}}$ On munit $\mathbb{R}^2$ d'une relation que l'on note $\leqslant$ en posant, pour (a, b) et (a', b') dans $\mathbb{R}^2$:

$$(a, b) \leqslant (a', b') \iff a < a' \quad \text{ou} \quad (a = a' \text{ et } b \leqslant b')$$

a. Démontrer que cette nouvelle relation est une relation d'ordre. Est-elle totale ?

b. L'axe des abscisses et l'axe des ordonnées sont-ils bornés ? Possèdent-ils un minimum et un maximum ? Et le cercle trigonométrique ?

$\boxed{\textbf{18}}$ On suppose qu'il existe une relation d'ordre totale $\leqslant$ sur $\mathbb{C}$ vérifiant les conditions :

- $\leqslant$ généralise la relation d'ordre classique sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que sa restriction à $\mathbb{R}$ est la relation d'ordre habituelle $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$.
- $\leqslant$ est compatible avec l'addition.

Démontrer qu'il est impossible que cette relation soit compatible avec la multiplication, *i.e.*, vérifie :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \quad 0 \leqslant a \quad \text{et} \quad b \leqslant c \implies ab \leqslant ac$$

$\boxed{\textbf{19}}$ Par combien de zéros se termine $1000!$?

$\boxed{\textbf{20}}$ Un anagramme d'un mot M est une permutation des lettres de M, *i.e.*, un mot contenant les mêmes lettres que M.

Combien les mots bûche, tarte, galette et millefeuilles ont-ils d'anagrammes ?

$\boxed{\textbf{21}}$ De combien de façons peut-on former deux équipes de 3 avec 6 personnes ?

Trois équipes de 3 avec 9 personnes ?

$\boxed{\textbf{22}}$ Un domino contient deux chiffres compris entre 0 et 6. Un jeu de dominos contient tous les dominos possibles, mais aucun en double.

a. Combien de dominos possède un jeu ?

b. Combien de paires de dominos ont au moins un numéro en commun ?

c. Combien de mains de sept dominos sont possibles au début du jeu ? Combien de celles-ci contiennent au moins un double ?

$\boxed{\textbf{23}}$ Un tournoi de Tennis fait participer $2n$ joueurs, avec $n \geqslant 1$. On souhaite organiser n matchs où chaque joueur en rencontre un autre.

Soit a_n le nombre de possibilités d'organisation.

a. Justifier que pour tout $n \geqslant 2$: $a_n = (2n-1)a_{n-1}$

On pourra isoler le joueur $2n$.

b. Calculer le terme général de a_n.

$\boxed{\textbf{24}}$ Soit E et F deux ensembles non-vides de cardinaux finis p et n. Calculer le nombre

a. d'applications de E dans F

b. de bijections de E dans F

c. d'injections de E dans F

d. de surjections de E dans F si $n = 1$ ou $n = 2$

e. de surjections de E dans F si $n = 3$.

$\boxed{\textbf{25}}$ Soit n et p deux entiers naturels.

a. Combien existe-t-il de p-listes $(x_1, \dots, x_p)$ d'entiers naturels tels que

$$0 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_p \leqslant n\ ?$$

b. Combien existe-t-il de listes strictement croissantes d'entiers naturels inférieurs ou égaux à n ?

$\boxed{\textbf{26}}$ Soit E un ensemble fini de cardinal n. On souhaite déterminer le cardinal de :

$$X = \left\{ (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2 \;\middle|\; A \subseteq B \right\}$$

a. Justifier que

$$X = \bigcup_{B \in \mathscr{P}(E)} \left\{ (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2 \;\middle|\; A \subseteq B \right\}$$

et que cette union est disjointe.

b. Justifier que :

$$\sum_{B \in \mathscr{P}(E)} \operatorname{Card} \mathscr{P}(B) = \sum_{k=0}^{n} \Bigg(\sum_{B \in \mathscr{P}_k(E)} \operatorname{Card} \mathscr{P}(B) \Bigg).$$

En déduire le cardinal de X.