

Feuille de T. D. B2

Ensembles

Exercices de cours

- ① Décrire $\mathcal{P}(E)$ si $E = \{a, b, c\}$.
- ② Soit A et B deux parties d'un ensemble E . Démontrer que :
- $A \cup B = A \iff B \subseteq A$
 - $A \cap B = A \iff A \subseteq B$
- ③ Démontrer que
- $$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
- et que cette dernière union est disjointe, *i.e.*, que :
- $$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$$
- ④ Décrire $F \times E$, E^2 et F^3 où :
- $$E = \{a, b, c\} \quad \text{et} \quad F = \{1, 2\}$$
- ⑤ Soit f une application de E dans F .
- Démontrer que pour toute partie A de E :
$$A \subseteq f^{-1}(f(A))$$
 - Démontrer que pour toute partie B de F :
$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$$
 - Grâce à l'exemple de la fonction $x \mapsto x^2$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , démontrer que les inclusions ci-dessus sont en général strictes.
- ⑥ On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U}$
- $$x \mapsto \frac{x + 2i}{2 + ix}$$
- Justifier que la fonction f est bien définie.
 - Démontrer que f est injective.
 - Démontrer que f n'est pas surjective.
- ⑦ Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = e^{x^2} - 1$.
- Déterminer trois bijections simples f_1, f_2, f_3 telles que $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$.
 - En déduire que f est bijective et donner son application réciproque.
- ⑧ Sur l'ensemble \mathbb{C}^* on définit la relation $|$ par : $z|z'$ si et seulement si $\frac{z'}{z} \in \mathbb{R}_+^*$.
- Justifier que $|$ est une relation d'équivalence.
 - Quelles sont les classes d'équivalences ?
- ⑨ On munit \mathbb{N} de la relation de divisibilité. Quels sont les majorants de la partie $\{18, 30\}$? Quels sont ses minorants ?

Travaux dirigés

- ① Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E .
- Que peut-on dire si $A \cap B = A \cup B$?
 - Donner une condition nécessaire et suffisante en termes d'inclusions pour avoir l'égalité $A \cup B = B \cap C$.
 - Démontrer que si $A \cap C = B \cap C$ et $A \cup C = B \cup C$ alors $A = B$.
- ② Soit E , et F deux ensembles, puis A, C deux parties de E , et B, D deux parties de F .
- Comparer $(A \cap C) \times (B \cap D)$ et $(A \times B) \cap (C \times D)$.
 - Comparer $(A \cup C) \times (B \cup D)$ et $(A \times B) \cup (C \times D)$.
 - Comparer $\overline{A} \times \overline{B}$ et $\overline{A \times B}$.
- ③ Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de parties de \mathbb{R} .
- Soit x un réel. Compléter :

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \iff ??? \quad x \in A_n$$

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \iff ??? \quad x \in A_n$$
 - Simplifier :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n} \right[\quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, 1 \right]$$
- ④ Soit E, F et G trois ensembles, et $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ deux applications. Démontrer que :
- Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
 - Si $g \circ f$ est injective et f est surjective alors g est injective.
 - Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
 - Si $g \circ f$ est surjective et g est injective alors f est surjective.
 - Donner un exemple où $g \circ f$ est bijective, mais f n'est pas surjective et g n'est pas injective.
- ⑤ Soit E, F, G et H quatre ensembles, et
- $$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$$
- trois applications. Démontrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives alors f, g et h le sont aussi.

6 Démontrer que chacune des fonctions suivantes est bien définie et bijective. Donner sa réciproque.

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f_2 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$x \longmapsto 3 - x \quad x \longmapsto 2e^{(3 \ln x - 5)}$$

$$f_3 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad f_4 : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$x \longmapsto \ln(e^x - 1) \quad x \longmapsto \frac{x-3}{x-2}$$

$$f_5 :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R} \quad f_6 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \ln \frac{1-x}{1+x} \quad x \longmapsto x - \frac{1}{x}$$

7 On note $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \tan x$.

a. Démontrer que f est bijective.

On note arctan l'application réciproque de f et on appelle *arc-tangente* cette fonction.

b. Démontrer que arctan est dérivable et calculer sa dérivée.

8 Les applications suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ?

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$x \longmapsto x^2 - 6x + 2 \quad z \longmapsto z + 2\bar{z}$$

$$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^3 + 3x^2 - 2x + 5$$

$$f_4 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad f_5 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$z \longmapsto z^2 - 2z - i \quad (x, y) \longmapsto xy^2$$

$$f_6 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad f_7 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto (\cos t, \sin t) \quad (x, y) \longmapsto (x + y, xy)$$

$$f_8 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (4x - 6y, 9y - 6x)$$

9 Soit a, b, c, d quatre complexes avec c non-nul et $ad \neq bc$.

$$\text{On pose : } f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

a. Donner l'ensemble de définition de f , que l'on note C_1 .

b. Démontrer que $f : C_1 \rightarrow \mathbb{C}$ est injective.

c. Calculer l'image de C_1 par f , que l'on note C_2 :
 $C_2 = f(C_1)$.

d. Justifier que f réalise une bijection de C_1 dans C_2 . Calculer sa réciproque.

10 Soit E un ensemble, et A une partie de E .

$$\text{On définit l'application } f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$$

$$X \longmapsto X \cap A$$

a. Démontrer que f est surjective.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective.

11 Soit E un ensemble, A et B deux parties de E . On définit l'application :

$$f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$$

$$X \longmapsto (X \cap A, X \cap B)$$

Démontrer que :

a. f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

b. f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

12 Soit E un ensemble. Démontrer qu'il n'existe pas d'application surjective f de E dans $\mathcal{P}(E)$.

On pourra pour ceci considérer la partie :

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$$

13 Soit E et F deux ensembles, et f une application de E dans F . Soit A, A' deux parties de E , et B, B' deux parties de F . Démontrer les égalités et inclusions suivantes :

a. Si $B \subseteq B'$ alors $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(B')$.

b. $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

c. $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.

d. $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$.

e. Si $A \subseteq A'$ alors $f(A) \subseteq f(A')$.

f. $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$. A-t-on toujours l'inclusion inverse ? Qu'en est-il si f est injective ?

g. $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.

h. Peut-on comparer $f(\overline{A})$ et $\overline{f(A)}$?

i. Démontrer que si f est injective alors $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ et si f est surjective alors $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.

14 On définit sur \mathbb{R} la relation de congruence modulo π par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$x \equiv y \quad [\pi] \quad \iff \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad x - y = k\pi$$

a. Démontrer que cette relation est une relation d'équivalence.

b. Quelle est la classe d'équivalence d'un réel x_0 ?

15 Soit \mathcal{E} la classe de tous les ensembles finis, c'est-à-dire ayant un nombre fini d'éléments.

Pour deux ensembles finis E et F on note $E \sim F$ s'il existe une bijection de E dans F .

a. Démontrer que \sim est une relation d'équivalence sur \mathcal{E} .

b. Quelles sont les classes d'équivalences ?

16 On munit \mathbb{R}^2 d'une relation que l'on note \leq en posant, pour (a, b) et (a', b') dans \mathbb{R}^2 :

$$(a, b) \leq (a', b') \iff a < a' \quad \text{ou} \quad (a = a' \text{ et } b \leq b')$$

a. Démontrer que cette nouvelle relation est une relation d'ordre. Est-elle totale ?

b. L'axe des abscisses et l'axe des ordonnées sont-ils bornés ? Possèdent-ils un minimum et un maximum ? Et le cercle trigonométrique ?

c. Cette relation d'ordre procure une relation d'ordre à \mathbb{C} en l'identifiant à \mathbb{R}^2 . Montrer que l'implication :

$$0 \leq a \quad \text{et} \quad b \leq c \implies ab \leq ac$$

est fautive en général.