Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2023-2024**
MPSI – Mathématiques

Feuille de T. D. B2
Ensembles

Exercices de cours

1 Décrire $\mathcal{P}(E)$ si $E = \{a, b, c\}$.

2 Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Démontrer que :

a. $A \cup B = A \iff B \subseteq A$

b. $A \cap B = A \iff A \subseteq B$

3 Démontrer que

$$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

et que cette dernière union est disjointe, *i.e.,* que :

$$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$$

4 Décrire $F \times E$, E^2 et F^3 où :

$$E = \{a, b, c\} \quad \text{et} \quad F = \{1, 2\}$$

5 Soit f une application de E dans F.

a. Démontrer que pour toute partie A de E :
$$A \subseteq f^{-1}(f(A))$$

b. Démontrer que pour toute partie B de F :
$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$$

c. Grâce à l'exemple de la fonction $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, démontrer que les inclusions ci-dessus sont en général strictes.

6 On note $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U}$

$$x \longmapsto \frac{x+2i}{2+ix}$$

a. Justifier que la fonction f est bien définie.

b. Démontrer que f est injective.

c. Démontrer que f n'est pas surjective.

7 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = e^{x^2} - 1$.

a. Déterminer trois bijections simples f_1, f_2, f_3 telles que $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

b. En déduire que f est bijective et donner son application réciproque.

8 Quelles sont les classes d'équivalence de la relation de congruence modulo 2 sur $\mathbb{Z}$?

9 Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. Alors le couple $\{A, B\}$ est une partie de $\mathcal{P}(E)$.

Quels sont les majorants de cette partie ?

Quels sont ses minorants ?

10 On munit $\mathbb{N}$ de la relation de divisibilité.

Quels sont les majorants de la partie $\{18, 30\}$?

Quels sont ses minorants ?

Travaux dirigés

1 Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E.

a. Que peut-on dire si $A \cap B = A \cup B$?

b. Donner une condition nécessaire et suffisante en termes d'inclusions pour avoir l'égalité $A \cup B = B \cap C$.

c. Démontrer que si $A \cap C = B \cap C$ et $A \cup C = B \cup C$ alors $A = B$.

2 Soit E, et F deux ensembles, puis A, C deux parties de E, et B, D deux parties de F.

a. Comparer $(A \cap C) \times (B \cap D)$ et $(A \times B) \cap (C \times D)$.

b. Comparer $(A \cup C) \times (B \cup D)$ et $(A \times B) \cup (C \times D)$.

c. Comparer $\overline{A} \times \overline{B}$ et $\overline{A \times B}$.

3 Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de parties de $\mathbb{R}$.

a. Soit x un réel. Compléter :

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \iff ??? \quad x \in A_n$$

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \iff ??? \quad x \in A_n$$

b. Simplifier :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right[\qquad \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, 1\right]$$

4 Soit E, F et G trois ensembles, et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications. Démontrer que :

a. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

b. Si $g \circ f$ est injective et f est surjective alors g est injective.

c. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

d. Si $g \circ f$ est surjective et g est injective alors f est surjective.

e. Donner un exemple où $g \circ f$ est bijective, mais f n'est pas surjective et g n'est pas injective.

5 Soit E, F, G et H quatre ensembles, et

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$$

trois applications.

Démontrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives alors f, g et h le sont aussi.

$\boxed{6}$ Démonter que chacune des fonctions suivantes est bien définie et bijective. Donner sa réciproque.

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3-x \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & 2e^{(3\ln x-5)} \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(e^x-1\right) \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ x & \longmapsto & \frac{x-3}{x-2} \end{array}$$

$$f_5 : \begin{array}{rcl}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\frac{1-x}{1+x} \end{array} \qquad f_6 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x-\frac{1}{x} \end{array}$$

$\boxed{7}$ Les applications suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ?

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2-6x+2 \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z+2\bar{z} \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3+3x^2-2x+5 \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^2-2z-i \end{array} \qquad f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy^2 \end{array}$$

$$f_6 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array} \qquad f_7 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, xy) \end{array}$$

$$f_8 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (4x-6y, 9y-6x) \end{array}$$

Préciser l'image de chacune d'entre elle, et l'application réciproque de celles qui sont bijectives.

$\boxed{8}$ Soit a, b, c, d quatre complexes avec c non-nul et $ad \neq bc$.

On pose : $\quad f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$

a. Donner l'ensemble de définition de f, que l'on note C_1.

b. Démontrer que $f : C_1 \to \mathbb{C}$ est injective.

c. Calculer l'image de C_1 par f, qui l'on note C_2 : $C_2 = f(C_1)$.

d. Justifier que f réalise une bijection de C_1 dans C_2. Calculer sa réciproque.

$\boxed{9}$ Soit E un ensemble, et A une partie de E.

On définit l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \\ X & \longmapsto & X\cap A \end{array}$

a. Démontrer que f est surjective.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective.

$\boxed{10}$ Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. On définit l'application :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X\cap A, X\cap B) \end{array}$$

Démontrer que :

a. f est injective si et seulement si $A\cup B = E$.

b. f est surjective si et seulement si $A\cap B = \varnothing$.

$\boxed{11}$ Soit E un ensemble. Démontrer qu'il n'existe pas d'application surjective f de E dans $\mathcal{P}(E)$.

On pourra pour ceci considérer la partie :

$$A = \{x\in E \mid x\notin f(x)\}$$

$\boxed{12}$ Soit E et F deux ensembles, et f une application de E dans F. Soit A, A' deux parties de E, et B, B' deux parties de F. Démontrer les égalités et inclusions suivantes :

a. Si $B\subseteq B'$ alors $f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(B')$.

b. $f^{-1}(B\cap B') = f^{-1}(B)\cap f^{-1}(B')$.

c. $f^{-1}(B\cup B') = f^{-1}(B)\cup f^{-1}(B')$.

d. $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$.

e. Si $A\subseteq A'$ alors $f(A)\subseteq f(A')$.

f. $f(A\cap A')\subseteq f(A)\cap f(A')$. A-t-on toujours l'inclusion inverse ? Qu'en est-il si f est injective ?

g. $f(A\cup A') = f(A)\cup f(A')$.

h. Peut-on comparer $f(\overline{A})$ et $\overline{f(A)}$?

i. Démontrer que si f est injective alors $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$ et si f est surjective alors $\overline{f(A)}\subseteq f(\overline{A})$.

$\boxed{13}$ On définit sur $\mathbb{R}$ la relation de congruence modulo π par :

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$x\equiv y \quad [\pi] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists k\in\mathbb{Z} \quad x-y = k\pi$$

a. Démontrer que cette relation est une relation d'équivalence.

b. Quelle est la classe d'équivalence d'un réel x_0 ?

$\boxed{14}$ Soit $\mathcal{E}$ la classe de tous les ensembles finis, c'est-à-dire ayant un nombre fini d'éléments.

Pour deux ensembles finis E et F on note $E\sim F$ s'il existe une bijection f de E dans F.

a. Démontrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{E}$.

b. Quelles sont les classes d'équivalences ?

$\boxed{15}$ On munit $\mathbb{R}^2$ d'une relation que l'on note $\leqslant$ en posant, pour (a,b) et (a',b') dans $\mathbb{R}^2$:

$(a,b)\leqslant(a',b')$

$$\Longleftrightarrow \quad a<a' \quad \text{ou} \quad (a=a' \text{ et } b\leqslant b')$$

a. Démontrer que cette nouvelle relation est une relation d'ordre. Est-elle totale ?

b. L'axe des abscisses et l'axe des ordonnées sont-ils bornés ? Possèdent-ils un minimum et un maximum ? Et le cercle trigonométrique ?

c. Cette relation d'ordre procure une relation d'ordre à $\mathbb{C}$ en l'identifiant à $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'implication :

$$0\leqslant a \quad \text{et} \quad b\leqslant c \quad \Longrightarrow \quad ab\leqslant ac$$

est fausse en général.