

Programme de colles
Semaine 5
du 14 au 18 octobre 2024

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Somme et produit des racines n -èmes de l'unité.
2. Distributivité de l'intersection par rapport à l'union, et vice-versa.
3. La composée de deux injections est une injection.
4. La composée de deux surjections est une surjection.
5. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction. S'il existe une fonction $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$ alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

Exercices

Chapitre B1. Les nombres complexes

- I. Généralités
- II. Angles
- III. Équations algébriques
- IV. L'exponentielle complexe

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitres B1 (Complexes) et B2 (Ensembles).

Chapitre B1. Les nombres complexes

I. Généralités

Parties réelle et imaginaire, opérations sur les nombres complexes, représentation dans le plan, affixe et image, droite des réels, des imaginaires purs.

Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Formules $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$. Caractérisation des réels et des imaginaires purs ($\bar{\bar{z}} = z$ et $\bar{-z} = -z$).

Module, compatibilité avec la multiplication. Inégalités triangulaires. Lemme pour la démonstration : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\bar{z}| = |z|$ et $-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|$, $-|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$.

Le module de $a - b$ est la distance de A à B . Définitions : cercle, disque ouvert et fermé dans le plan complexe.

II. Angles

On note \mathbb{U} l'ensemble des nombres complexes de module 1. Il est stable par multiplication, passage à l'inverse. On pose $e^{it} = \cos t + i \sin t$. Alors $e^{it} e^{it'} = e^{i(t+t')}$. Formules d'Euler.

Argument : définition, non-unicité, propriétés ($\arg(zz') = \dots$). Aspect géométrique de la multiplication de deux complexes. Formes algébriques et exponentielles d'un complexe. Description géométrique des applications $z \mapsto z + b$, $z \mapsto \lambda z$, $z \mapsto e^{i\theta} z$ et $z \mapsto \bar{z}$.

Applications à la trigonométrie : formules de somme, de duplication, de transformation de produit en somme, de transformation de somme en produit, formules en $t = \tan(x/2)$. Formule de Moivre, calcul des cosinus, sinus de nx où n est un entier naturel. Linéarisation d'une expression trigonométrique, petits calculs d'intégrales. Simplification de $1 + e^{it}$, $e^{ip} + e^{iq}$ en factorisant par l'exponentielle de l'angle moyen. Simplification de $a \cos x + b \sin x$ (transformation de Fresnel).

Applications à la géométrie : conditions nécessaires et suffisantes sur les affixes pour que trois points soient alignés, deux vecteurs soient parallèles ou orthogonaux.

III. Equations algébriques.

Equations du second degré à coefficients complexes. Somme et produit des racines.

Racines de l'unité, notation \mathbb{U}_n , exemples. Somme (0) et produit $((-1)^{n-1})$.

Racines n -èmes d'un complexe quelconque.

IV. L'exponentielle complexe

Définition : $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Propriétés, l'application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est surjective, non injective (première introduction de ces notions, sans donner les définitions).