Devoir Surveillé n°2

Durée : 3 heures – Calculatrices non autorisées

Exercice. *(4 points)*

Soit λ un paramètre réel. Résoudre le système suivant.

$$S_\lambda : \quad \begin{cases} x + \ \ y + \quad z = \ \ \lambda \\ x + 2y + \ \ \lambda z = \ \ 1 \\ x + 4y + \lambda^2 z = -1. \end{cases}$$

On précisera bien le nombre de solutions en fonction de la valeur de λ.

Problème 1. Formule d'inversion de Pascal *(10 points)*

Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Soit $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad b_j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} a_i.$$

On souhaite exprimer les a_i en fonction des b_j.

1. Démontrer que pour tous entiers i, j, n tels que $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$: $\binom{n}{j}\binom{j}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{j-i}$.
2. Pour tous entiers i et n tels que $0 \leqslant i \leqslant n$ on pose : $S_{n,i} = \sum_{j=i}^{n} (-1)^{j-i}\binom{n}{j}\binom{j}{i}$.

   Démontrer que : $S_{n,i} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < n \\ 1 & \text{si } i = n. \end{cases}$
3. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+j} \binom{n}{j} b_j.$$
4. Une application.

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = (n+1)u_n + (-1)^{n+1}.$$
   (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

   (b) En déduire que pour tout $j \in \mathbb{N}$: $(-1)^j u_j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-1)^i i!$

   (c) Déterminer la valeur de $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} u_j$.

Problème 2. *(22 points)*

Partie A. *(8 points)*

On définit la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ sur l'ensemble $\mathcal{D}_g = \left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[$.

1. Justifier que l'on peut restreindre l'étude de g à l'intervalle $\left[1,+\infty\right[$.
2. Démontrer que g n'est pas dérivable en 1.
3. Décrire les variations de g sur $\left[1,+\infty\right[$.
4. (a) Démontrer que :

$$\forall x \in \left[1,+\infty\right[\qquad x - \frac{1}{x} \leqslant g(x) \leqslant x. \tag{1}$$

   (b) En déduire que la courbe représentative de g admet une asymptote en $+\infty$ et donner une équation de celle-ci.

   (c) Obtenir un encadrement de g sur $\left]-\infty,-1\right]$ similaire à (1).
   Justifier que g admet une asymptote en $-\infty$ et en donner une équation.
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de g.

Partie B. *(9 points)*

1. Soit φ une fonction définie sur une partie E de $\mathbb{R}$, et $\psi(x) = \ln\left(x+\varphi(x)\right)$.
   Soit x_0 un élément de E tel que $x_0 + \varphi(x_0) > 0$.
   Démontrer par l'absurde que si φ n'est pas dérivable en x_0 alors ψ n'est pas dérivable en x_0.

On pose maintenant $f : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

2. Déterminer l'ensemble de définition de f, que l'on notera $\mathcal{D}$.
3. Démontrer que f n'est pas dérivable en 1.
4. Justifier que f est dérivable en tout point de $\mathcal{D} \setminus \{1\}$, et calculer sa dérivée.
5. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad f(x) \leqslant \ln(2x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \ln(2x)\right) = 0.$$

6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f ainsi que celle de la fonction $a : x \mapsto \ln(2x)$.
7. (a) Démontrer que tout réel y positif admet un et un seul antécédent par la fonction f.

   (b) Exprimer cet antécédent en fonction de y.

Partie C. *(5 points)*

Soit $h(x) = f\left(\frac{1}{\cos x}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de h, sa périodicité et sa parité.
   Justifier que l'on peut restreindre son étude à l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.
2. Démontrer que : $\quad \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\quad h(x) = \ln\frac{1+\sin x}{\cos x}$.
3. Soit k la restriction de h à l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$:

$$k : \begin{array}{rcl} \left[0,\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\frac{1+\sin x}{\cos x}. \end{array}$$

   Justifier que k est dérivable et donner une forme simple de sa dérivée.
   Ceci montre en particulier que h est dérivable à droite en 0, et on notera cette dérivée $h'_d(0) = k'(0)$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de h sur l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$.