Corrigé du Devoir Surveillé n°2

Exercice. *(4 points)*

On résout le système suivant en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan.

$$S_\lambda : \quad \begin{cases} x + y + z = \lambda \\ x + 2y + \lambda z = 1 \\ x + 4y + \lambda^2 z = -1 \end{cases}$$

Les opérations $(L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$ et $(L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$ donnent :

$$S_\lambda \iff \begin{cases} x + y + z = \lambda \\ y + (\lambda - 1)z = 1 - \lambda \\ 3y + (\lambda^2 - 1)z = -1 - \lambda \end{cases}$$

L'opération $(L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2)$ donne :

$$S_\lambda \iff \begin{cases} x + y + z = \lambda \\ y + (\lambda - 1)z = 1 - \lambda \\ (\lambda - 1)(\lambda - 2)z = 2(\lambda - 2) \end{cases}$$

On a calculé : $(\lambda^2 - 1) - (\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1 - 3) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$
et $-1 - \lambda - 3(1 - \lambda) = 2\lambda - 4 = 2(\lambda - 2)$.

Ce système est de Cramer s'il admet trois pivots, ce qui est le cas si et seulement si $(\lambda - 1)(\lambda - 2) \neq 0$, donc si et seulement si λ est différent de 1 et de 2.

Cas 1 : $\lambda = 1$.

Le système devient :

$$S_1 \iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = 0 \\ 0 = -2 \end{cases}$$

Il n'admet pas de solution.

Cas 2 : $\lambda = 2$.

Le système devient :

$$S_\lambda \iff \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + z = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 - z \end{cases}$$

Les solutions sont les triplets $(3, -1 - z, z)$ où $z \in \mathbb{R}$, elles sont en nombre infini.

Cas 3 : $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 2$.

Alors $(\lambda - 1)(\lambda - 2) \neq 0$ donc on peut appliquer l'opération $(L_3 \leftarrow \frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-2)} L_3)$:

$$S_\lambda \iff \begin{cases} x + y + z = \lambda \\ y + (\lambda - 1)z = 1 - \lambda \\ z = \frac{2}{\lambda - 1} \end{cases}$$

Les opérations $(L_2 \leftarrow L_2 - (\lambda - 1)L_3)$ et $(L_1 \leftarrow L_1 - L_3)$ donnent :

$$S_\lambda \iff \begin{cases} x + y & = \lambda - \frac{2}{\lambda-1} = \frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1} \\ \quad y & = -1 - \lambda \\ \quad\quad z & = \frac{2}{\lambda-1} \end{cases}$$

Enfin l'opération $(L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$ donne :

$$S_\lambda \iff \begin{cases} x = \frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1} + (\lambda+1) = \frac{2\lambda^2-\lambda-3}{\lambda-1} \\ y = -1-\lambda \\ z = \frac{2}{\lambda-1} \end{cases}$$

L'unique solution est $(x, y, z) = \left(\frac{2\lambda^2-\lambda-3}{\lambda-1}, -1-\lambda, \frac{2}{\lambda-1}\right)$.
Finalement on obtient l'ensemble des solutions suivants :

$$\mathcal{S}_\lambda = \begin{cases} \varnothing & \text{si } \lambda = 1 \\ \{(3, -1-z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} & \text{si } \lambda = 2 \\ \left\{\left(\frac{2\lambda^2-\lambda-3}{\lambda-1}, -1-\lambda, \frac{2}{\lambda-1}\right)\right\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Problème 1. Formule d'inversion de Pascal *(10 points)*

1. *(1 point)* Par définition des coefficients du binôme :

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \quad \text{tel que} \quad 0 \leqslant k \leqslant n : \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Comme $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ alors les coefficients du binôme $\binom{n}{j}$, $\binom{j}{i}$ et $\binom{n}{i}$ sont donnés par cette formule. De plus $0 \leqslant j - i \leqslant n - i$ donc le coefficient $\binom{n-i}{j-i}$ peut aussi être exprimé grâce à cette formule.
On obtient :

$$\binom{n}{j}\binom{j}{i} = \frac{n!}{(n-j)!i!(j-i)!} \qquad \text{et} \qquad \binom{n}{i}\binom{n-i}{j-i} = \frac{n!}{i!(j-i)!(n-j)!}$$

Ces deux produits sont bien égaux.

2. *(2 points)* Si j va de i à n alors $i \leqslant j \leqslant n$, donc on peut appliquer la formule de la question précédente. Elle donne :

$$S_{n,i} = \sum_{j=i}^{n} (-1)^{j-i} \binom{n}{j}\binom{j}{i} = \sum_{j=i}^{n} (-1)^{j-i} \binom{n}{i}\binom{n-i}{j-i}.$$

Par linéarité de la somme :

$$S_{n,i} = \binom{n}{i} \sum_{j=i}^{n} (-1)^{j-i} \binom{n-i}{j-i}.$$

Le changement d'indice $k = j - i$ donne :

$$S_{n,i} = \binom{n}{i}\sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k\binom{n-i}{k} = \binom{n}{i}\sum_{k=0}^{n-i}\binom{n-i}{k}(-1)^k 1^{n-i-k}.$$

D'après la formule du binôme, si $n - i > 0$ alors :

$$S_{n,i} = \binom{n}{i}((-1)+1)^{n-i} = 0.$$

Cette dernière expression n'est pas définie si $n = i$. Si $i = n$ alors :

$$S_{n,i} = \binom{n}{n}\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}(-1)^k = 1.$$

On obtient bien le résultat souhaité :

$$S_{n,i} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < n \\ 1 & \text{si } i = n. \end{cases}$$

3. *(2 points)* Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}\binom{n}{j}b_j.$$

D'après la définition des b_j :

$$\alpha_n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}a_i.$$

Par linéarité de la somme :

$$\alpha_n = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{n+j}\binom{n}{j}\binom{j}{i}a_i = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(-1)^{n+j}\binom{n}{j}\binom{j}{i}a_i.$$

Il s'agit d'une somme triangulaire, qui s'écrit aussi :

$$\alpha_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}(-1)^{n+j}\binom{n}{j}\binom{j}{i}a_i$$

Par linéarité on fait apparaître la somme $S_{n,i}$:

$$\alpha_n = \sum_{i=0}^{n}\left[(-1)^{n+i}a_i\left(\sum_{j=i}^{n}(-1)^{j-i}\binom{n}{j}\binom{j}{i}\right)\right] = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+i}a_iS_{n,i}.$$

D'après la question précédente : $S_{n,i} = 0$ si $i = 0, \dots, n-1$. Donc :

$$\alpha_n = (-1)^{2n}a_nS_{n,n}.$$

Comme $S_{n,n} = 1$ alors $\alpha_n = a_n$. On a bien prouvé :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}\binom{n}{j}b_j.$$

4. (a) *(2 points)* Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}_n : \quad u_n = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. La propriété $\mathcal{P}_0$ s'écrit : $u_0 = 0!\sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k}{k!}$.
Comme $u_0 = 1$ et $0! = 1$ alors elle est vraie.
Hérédité. Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_{n+1} = (n+1)u_n + (-1)^{n+1}.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1) \times n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + (-1)^{n+1} \\ &= (n+1)!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + (n+1)!\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= (n+1)!\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
L'hérédité est démontrée.
Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) *(1 point)* D'après la question précédente :

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad (-1)^j u_j = (-1)^j j!\sum_{k=0}^{j} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Par linéarité de la somme :

$$(-1)^j u_j = \sum_{k=0}^{j} (-1)^{k+j} \frac{j!}{k!}.$$

Comme $\binom{j}{k} = \frac{j!}{k!(j-k)!}$ pour tout $k = 0, \dots, j$:

$$(-1)^j u_j = \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j+k} \binom{j}{k} (j-k)!$$

On applique le changement de variable $i = j - k$, qui équivaut à $k = j - i$. Lorsque k va de 0 à j, i va de j à 0 donc :

$$(-1)^j u_j = \sum_{i=0}^{j} (-1)^{2j-i} \binom{j}{j-i} i!$$

Par symétrie du triangle de Pascal : $\binom{j}{j-i} = \binom{j}{i}$. De plus $(-1)^{2j-i} = (-1)^{-i} = (-1)^i$, donc :

$$(-1)^j u_j = \sum_{k=0}^{j} (-1)^i \binom{j}{i} i!$$

Il s'agit bien du résultat attendu.

(c) *(2 points)* Posons, pour tout $i \in \mathbb{N}$: $\quad a_i = (-1)^i i!$

Notons comme dans le début de ce problème, pour tout $j \in \mathbb{N}$: $\quad b_j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} a_i$.

La question précédente montre que :

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad (-1)^j u_j = b_j.$$

Alors d'après la question (3) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+j} \binom{n}{j} b_j.$$

Ceci donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (-1)^n n! = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+n} \binom{n}{j} (-1)^j u_j = (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} u_j.$$

On a donc démontré :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} u_j = n!$$

Problème 2. *(22 points)*

Partie A. *(8 points)*

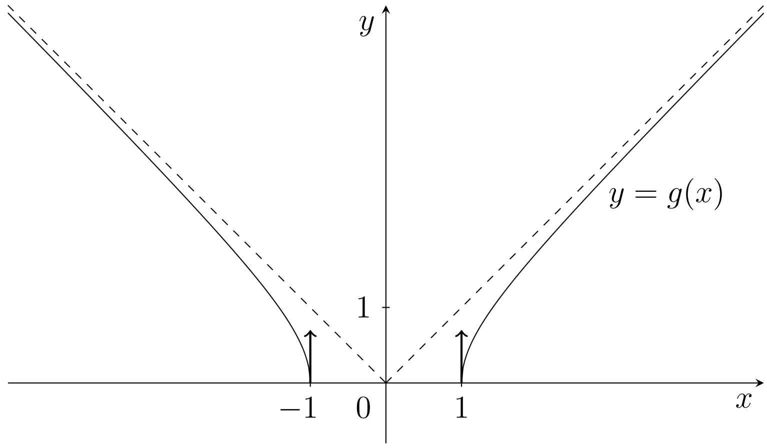
1. *(1 point)* L'ensemble $\mathcal{D}_g =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ est symétrique par rapport à zéro.
   De plus, comme :
   $$\forall x \in \mathcal{D}_g \qquad g(-x) = \sqrt{x^2 - 1} = g(x)$$
   alors g est paire.
   On peut donc restreindre son étude à l'intervalle $[1, +\infty[$, puis obtenir le reste de sa courbe par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
2. *(1 point)* On calcule :
   $$\forall x \in]1, +\infty[\qquad \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} = \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{\sqrt{(x-1)^2}} \qquad \text{car } x - 1 > 0$$
   $$= \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$
   Ceci montre que :
   $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = +\infty.$$
   La fonction g n'est donc pas dérivable en 1.

3. *(1 point)* La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[1,+\infty[$. Par composition avec les fonctions $X \mapsto X-1$ et $X \mapsto \sqrt{X}$, qui sont aussi strictement croissantes, la fonction g est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
   On peut aussi utiliser la dérivation.
   - la fonction $x \mapsto x^2-1$ est dérivable,
   - $\forall x \in \,]1,+\infty[\qquad x^2-1>0$,
   - la fonction $X \mapsto \sqrt{X}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,

   alors la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]1,+\infty[$ par composition.
   On calcule :
$$\forall x \in \,]1,+\infty[\qquad g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$
   Cette dérivée est strictement positive donc g est strictement croissante sur $]1,+\infty[$.
   Par composition g est continue en 1 donc g est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

4. (a) *(1 point)* On raisonne par équivalences.
   Si $x \in [1,+\infty[$ alors $x^2 \geqslant 1$ donc $\frac{x^2-1}{x} \geqslant 0$, soit $x - \frac{1}{x} \geqslant 0$.
   Ainsi par équivalences, tous les termes étant positifs :
$$\begin{aligned}\forall x \in [1,+\infty[\qquad x-\frac{1}{x} \leqslant g(x) \leqslant x \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 \leqslant g^2(x) \leqslant x^2\\ &\Longleftrightarrow \quad x^2-2+\frac{1}{x^2} \leqslant x^2-1 \leqslant x^2\\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x^2} \leqslant 1 \leqslant 2.\end{aligned}$$
   Cette dernière inégalité est vraie pour tout $x \in [1,+\infty[$.
   Par équivalence l'égalité (1) est vraie pour tout $x \in [1,+\infty[$:
$$\forall x \in [1,+\infty[\qquad x-\frac{1}{x} \leqslant g(x) \leqslant x. \tag{1}$$
   (b) *(1 point)* L'égalité ci-dessus donne :
$$\forall x \in [1,+\infty[\qquad -\frac{1}{x} \leqslant g(x)-x \leqslant 0.$$
   Par théorème d'encadrement :
$$\lim_{x\to+\infty} (g(x)-x) = 0.$$
   Ceci montre que la droite d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe de g en $+\infty$.
   (c) *(1 point)* Si $x \in \,]-\infty,-1]$ alors $-x \in [1,+\infty[$ donc l'encadrement (1) montre que :
$$\forall x \in \,]-\infty,-1] \qquad -x+\frac{1}{x} \leqslant g(-x) \leqslant -x.$$
   Comme g est paire alors :
$$\forall x \in \,]-\infty,-1] \qquad -x+\frac{1}{x} \leqslant g(x) \leqslant -x.$$
   Cet encadrement montre que la droite d'équation $y=-x$ est asymptote à la courbe de g en $-\infty$.

5. *(2 points)* On obtient une courbe comme la suivante.



Partie B. *(9 points)*

1. *(1 point)* Pour tout $x \in E$ on note $\psi(x) = \ln(x + \varphi(x))$, et x_0 un élément de E tel que $x_0 + \varphi(x_0) > 0$, ce qui montre que $\psi(x_0)$ est défini.
   On suppose que φ n'est pas dérivable en x_0.
   Supposons que ψ est dérivable en x_0.
   La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composition la fonction $\exp \circ \psi$ est dérivable en x_0.
   Ainsi la fonction $x \mapsto \exp(\psi(x)) = x + \varphi(x)$ est dérivable en x_0.
   La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par soustraction la fonction
   $$x \mapsto (x + \varphi(x)) - x = \varphi(x)$$
   est dérivable en x_0.
   Ceci contredit le fait que φ ne soit pas dérivable en x_0.
   Donc par l'absurde la fonction ψ n'est pas dérivable en x_0.
2. *(1 point)* On remarque que $f(x) = \ln(x + g(x))$.
   La fonction g est définie sur $\mathcal{D}_g =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
   On rappelle que la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Si $x \geqslant 1$ alors $x + \sqrt{x^2 - 1} > 0$ donc $f(x)$ est défini.
   Si $x \leqslant -1$ alors d'après la question (4c) de la partie précédente : $g(x) \leqslant -x$. Ceci donne $x + g(x) \leqslant 0$ donc $g(x)$ n'est pas défini.
   Finalement la fonction g est définie sur $\mathcal{D} = [1, +\infty[$.
3. *(1 point)* On sait que $f(x) = \ln(x + g(x))$. La fonction g est définie sur $[1, +\infty[$ mais n'est pas dérivable en 1.
   D'après la question 1 ci-dessus, en notant $E = [1, +\infty[$, $\varphi = g$ et $\psi = f$, la fonction f n'est pas dérivable en 1.

4. *(1 point)* Si $x \in]1,+\infty[$ alors $x > 1$ donc $x^2 - 1 > 0$.
   Or la fonction $X \mapsto \sqrt{X}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable, de même que la fonction $x \mapsto x$ et la fonction ln.
   Par composition et somme la fonction $f : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ est dérivable sur $]1,+\infty[$.
   Sa dérivée est :

$$\forall x \in]1,+\infty[\qquad f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}}$$

   Finalement :

$$\forall x \in]1,+\infty[\qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

5. *(2 points)* L'encadrement (1) donne :

$$\forall x \in [1,+\infty[\qquad \sqrt{x^2-1} \leqslant x.$$

   Ainsi ;

$$\forall x \in [1,+\infty[\qquad 1 \leqslant x + \sqrt{x^2-1} \leqslant 2x.$$

   On applique la fonction ln :

$$\forall x \in [1,+\infty[\qquad 0 \leqslant f(x) \leqslant \ln(2x).$$

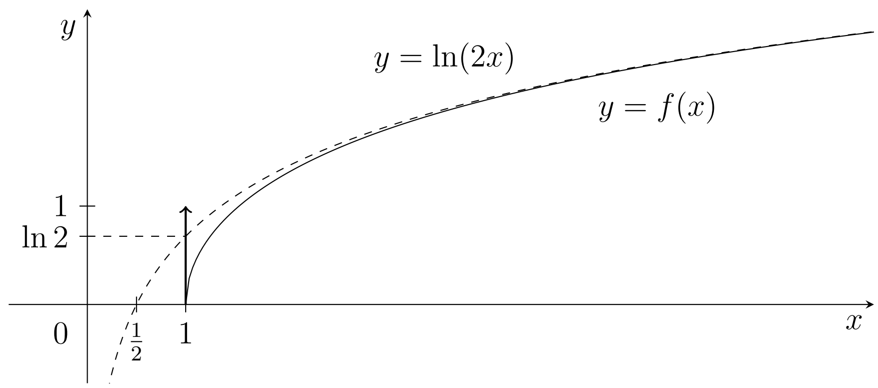
   L'inégalité $f(x) \leqslant \ln(2x)$ est démontrée.
   De plus :

$$\forall x \in [1,+\infty[\qquad f(x) - \ln(2x) = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2-1}}{2x}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)\right)$$

   Par composition de limites :

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \ln(2x)) = 0.$$

6. *(1 point)* Soit $a(x) = \ln(2x)$. Alors a est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et $a(x) = \ln x + \ln 2$, ce qui montre que la courbe représentative de a est obtenue à partir de celle du logarithme népérien par translation de vecteur de coordonnées $(0, \ln 2)$.
   On obtient des courbes comme les suivantes.



7. (a) *(1 point)* On sait que f est définie sur $\mathcal{D} = [1, +\infty[$.
Par composition f est continue.
Sa dérivée est strictement positive donc f est strictement croissante.
De plus

$$f(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = +\infty.$$

Par théorème f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$, ce qui montre que tout élément y de $\mathbb{R}_+$ admet un et un seul antécédent par f.

(b) *(1 point)* Soit $y \in \mathbb{R}_+$. Alors il existe un unique $x \in [1, +\infty[$ tel que $f(x) = y$.
On résout cette équation :

$$\begin{aligned}
f(x) = y \quad &\iff \quad \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = y \\
&\iff \quad x + \sqrt{x^2-1} = e^y \qquad \text{car la fonction exp est bijective} \\
&\iff \quad \sqrt{x^2-1} = e^y - x \\
&\implies \quad x^2 + 1 = (e^y - x)^2 = e^{2y} - 2xe^y + x^2 \\
&\iff \quad 2xe^y = e^{2y} + 1 \\
&\iff \quad x = \frac{e^{2y}+1}{2e^y} = \frac{e^y + e^{-y}}{2}
\end{aligned}$$

Cette valeur de x est la seule solution possible de l'équation $y = f(x)$.
Or on a démontré dans la question précédente qu'il existe une et une seule solution.
Donc cette solution est $x = \frac{e^y+e^{-y}}{2}$.
L'antécédent de y est donc $x = \frac{e^y+e^{-y}}{2}$.

Partie C. *(5 points)*

On pose $h(x) = f\left(\frac{1}{\cos x}\right)$.

1. *(2 points)* La fonction f est définie sur $\mathcal{D} = [1, +\infty[$ donc $h(x)$ est défini pour tout x tel que $\frac{1}{\cos x}$ est défini et $\frac{1}{\cos x} \geqslant 1$.
Ainsi $h(x)$ est défini si et seulement si $0 < \cos x \leqslant 1$, donc h est définie sur :

$$\mathcal{D}_h = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right[.$$

Cet ensemble est stable par addition de 2π et symétrique par rapport à zéro.
La fonction cosinus est 2π-périodique et paire donc f est 2π-périodique et paire.
On peut restreindre son étude à $\mathcal{D}_h \cap [-\pi, \pi] = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par périodicité, puis à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par parité.

2. *(1 point)* Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Alors :

$$\begin{aligned} h(x) &= \ln\left(\frac{1}{\cos x} + \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}\right) = \ln\left(\frac{1}{\cos x} + \sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{\cos x} + \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\cos x} + \frac{|\sin x|}{|\cos x|}\right) \end{aligned}$$

Comme $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors $\cos x$ et $\sin x$ sont positifs donc :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad h(x) = \ln \frac{1+\sin x}{\cos x}.$$

3. *(1 point)* Les fonctions cos, sin et ln sont dérivables donc par quotient et composition la fonction k est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
On calcule :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad k'(x) = \frac{\frac{\cos^2 x + (1+\sin x)\sin x}{\cos^2 x}}{\frac{1+\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\cos x}.$$

En particulier $h'_d(0) = k'(0) = 1$.

4. *(1 point)* On calcule :

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} h(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \ln \frac{1+\sin x}{\cos x} = \lim_{X \to +\infty} \ln X = +\infty.$$

De plus h' est strictement positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc h est strictement croissante sur cet intervalle.
On obtient $h(0) = 0$, on sait que $h'_d(0) = 1$.
En utilisant la parité et la 2π-périodicité de h on trace la courbe suivante.