Corrigé du Devoir à la Maison n°2

Ces exercices sont extraits de la feuille de TD A3.

11

j. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$.

Le quotient $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ est défini si et seulement si $\sin x \neq 1$,
donc si et seulement si $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Son logarithme est défini si et seulement si $\frac{1+\sin x}{1-\sin x} > 0$.
Or on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1.$$

Ceci montre que :

$$\begin{array}{lll} & \forall x \in \mathbb{R} \qquad 1+\sin x \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad 1-\sin x \geqslant 0 \\ \text{donc} & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \qquad \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} \geqslant 0. \end{array}$$

De plus pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$:

$$\begin{aligned} \frac{1+\sin x}{1-\sin x} = 0 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \sin x = -1 \\ &\Longleftrightarrow \qquad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Finalement $f(x)$ est défini si et seulement si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble de définition de f est donc :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Cet ensemble est stable par addition de 2π et comme la fonction sinus est 2π-périodique alors :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \qquad f(x+2\pi) = f(x).$$

Ainsi la fonction f et 2π-périodique. On peut restreindre son étude à $\mathcal{D}_f \cap [-\pi, \pi]$.
L'ensemble $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0. Comme la fonction sinus est impaire alors :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \qquad f(-x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin(-x)}{1-\sin(-x)} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = -f(x).$$

La fonction f est donc impaire. On peut restreindre son étude à :

$$\mathcal{D}_f \cap [0, \pi] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Par quotient et composition la fonction f est dérivable. Sa dérivée est :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \qquad \begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \times \frac{\cos x(1-\sin x) + (1+\sin x)\cos x}{(1-\sin x)^2} \times \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \\ &= \frac{\cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} \\ &= \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

La fonction f' est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et négative sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
On en déduit le tableau de variations de f :

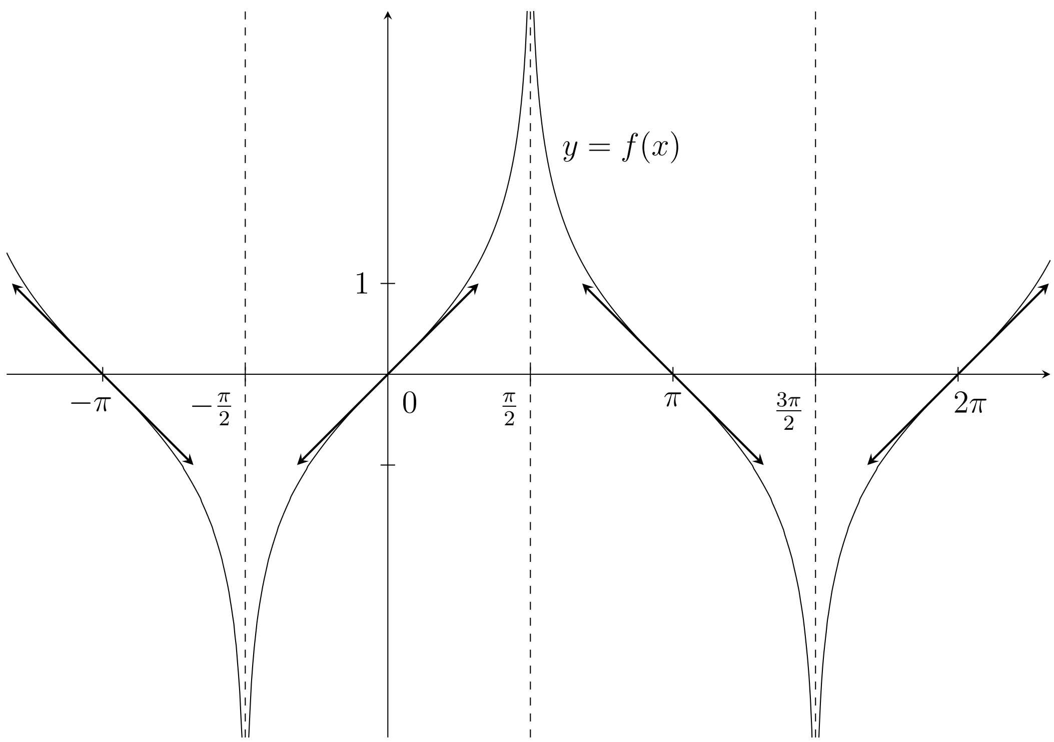
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	1	$+$	$\Vert$	$+$	-1
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0

Pour les limites de f en $\frac{\pi}{2}$ on remarque que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \qquad \frac{1+\sin x}{1-\sin x} > 0 \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1-\sin x} = +\infty$$

Ainsi par composition : $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$.

Finalement, en utilisant la parité et la périodicité de f on en déduit la courbe suivante.



k. Soit $f : x \mapsto x \ln x$.

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, dérivable par produit, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f'(x) = 1 + \ln x.$$

Par équivalences, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) \geqslant 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ln x \geqslant -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \geqslant e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Sa limite en $+\infty$ n'est pas indéterminée, et sa limite en $+$ est connue grâce au théorème des croissances comparées :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

On en déduit son tableau de variations :

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	1	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Comme f admet une limite finie en 0 on peut la prolonger par continuité en posant :

$$\tilde{f} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x\ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car f est continue. Elle est continue en 0 car :

$$\lim_{x\to 0} \tilde{f}(x) = \lim_{x\to 0} x\ln x = 0 = \tilde{f}(0)$$

Pour sa dérivabilité en 0 on calcule :

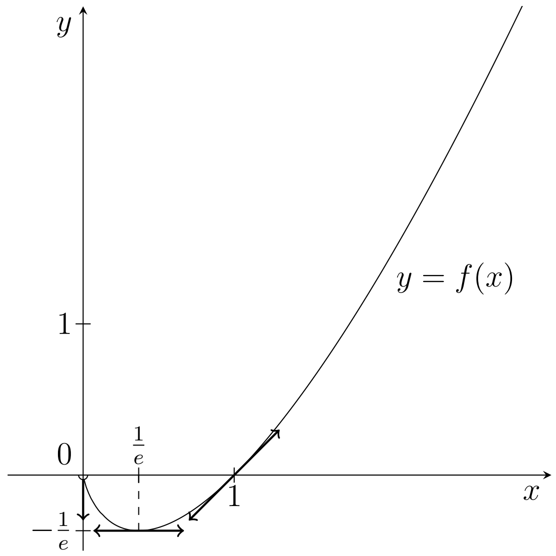
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty.$$

Ceci montre que la fonction $\tilde{f}$ n'est pas dérivable en 0 mais qu'elle y admet une demi-tangente verticale.

Pour la branche infinie de la courbe de f en $+\infty$ on remarque que pour tout $x > e$: $x < x\ln x$.

La fonction f croît donc plus vite que la fonction $x \mapsto x$.

On obtient une courbe comme la suivante :



12 L'énoncé définit les fonctions :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{x+3} \qquad\qquad g : x \mapsto \frac{x+3}{x+1} - \ln(x+1).$$

a. La fonction g est définie sur $]-1,+\infty[$.
Par somme et quotient elle est dérivable et :

$$\forall x \in \left]-1,+\infty\right[\qquad g'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = -\frac{x+3}{(x+1)^2}.$$

Cette dérivée est strictement négative sur $]-1,+\infty[$, donc g est strictement décroissante.
Pour calculer sa limite en -1 on remarque que $x+1>0$ si $x>-1$, donc :

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{x+3}{x+1} = +\infty.$$

De plus $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \ln(x+1) = -\infty$ donc par somme : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} g(x) = +\infty$.
Pour la limite de g en $+\infty$ on écrit : $g(x) = \frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}} - \ln(x+1)$.
Ceci montre que : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
La fonction g est continue et strictement décroissante donc d'après le théorème de la bijection elle réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ dans $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$.
Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors il admet un et un seul antécédent par g : il existe un unique $\alpha \in]-1,+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$.
Comme g est strictement décroissante on peut ajouter :

$$\forall x \in \left]-1,+\infty\right[\qquad g(x) > 0 \iff x < \alpha \qquad \text{et} \qquad g(x) < 0 \iff \alpha > 0.$$

On calcule $g(3) = \frac{3}{2} - 2\ln 2 \simeq 0{,}1$, cette valeur est positive donc $3 < \alpha$.
On calcule $g(4) = \frac{7}{5} - \ln 5 \simeq -0{,}2$, cette valeur est négative donc $4 > \alpha$.
On en déduit $3 < \alpha < 4$, ce qui est un encadrement de α d'amplitude 1.

b. Comme $g(\alpha) = 0$ alors $\frac{\alpha+3}{\alpha+1} = \ln(\alpha+1)$. Ceci donne : $\quad f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha+3} = \frac{1}{\alpha+1}$.

c. La fonction f est définie sur $I =]-1, +\infty[$. En effet pour x appartenant à cet intervalle on a $x + 1 > 0$ et $x + 3 \neq 0$.

Par composition et quotient la fonction f est dérivable et :

$$\forall x \in I \qquad f'(x) = \left(\frac{x+3}{x+1} - \ln(x+1)\right)\frac{1}{(x+3)^2} = \frac{g(x)}{(x+3)^2}.$$

Ceci montre que $f'(x)$ est du signe de $g(x)$, donc f' est positive sur $]1, \alpha[$ et négative sur $]\alpha, +\infty[$.

La limite de f en -1 n'est pas indéterminée : $\quad \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$.

Pour la limite de f en $+\infty$ on écrit :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \frac{\ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{1+\frac{3}{x}} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x+3}.$$

Par croissances comparées on sait : $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

On en déduit : $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

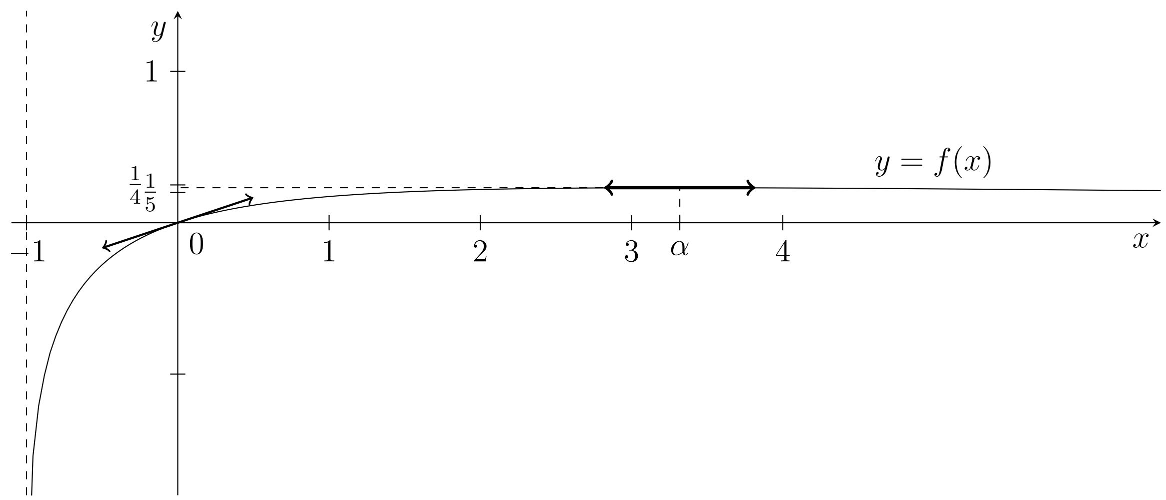
Le tableau de variations de f est :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

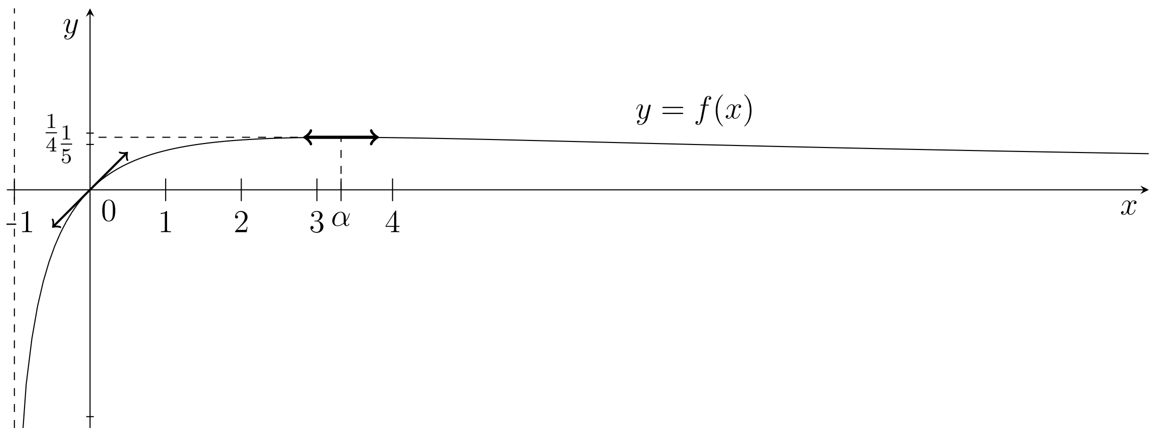
Comme $3 < \alpha < 4$ alors $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$ alors $\frac{1}{5} < f(\alpha) < \frac{1}{4}$.

On calcule $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{1}{3}$.

On obtient une courbe comme la suivante :



En repère non orthonormé (échelle des y triple de celle des x) :



$\boxed{\textbf{13}}$ On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - \ln^2 x - 1$.
Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, dérivable par produit et somme. Sa dérivée est :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f'(x) = 2x - 2\frac{\ln x}{x}.$$

On écrit :

$$f'(x) = \frac{2}{x}\Big(x^2 - \ln x\Big).$$

On considère alors la fonction $g : x \mapsto x^2 - \ln x$.
Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, dérivable de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}.$$

Cette dérivée est négative sur l'intervalle $\left]0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, et positive sur l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$.
La fonction g est donc décroissante sur $\left]0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$.
Ainsi elle admet un minimum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ce minimum a pour valeur $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1+\ln 2}{2}$. Cette valeur est positive, donc g est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
Comme $f'(x) = \frac{2}{x}g(x)$ alors f' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
On remarque que $f(1) = 0$, donc f est négative sur $]0, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$.