Devoir à la Maison n°3

1. Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$:

$$\frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{U} \qquad \Longleftrightarrow \qquad z \in \mathbb{R}$$

   (a) par le calcul algébrique,

   (b) par une méthode géométrique.

2. Soit x un réel fixé. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E_x) : \qquad \frac{i-z}{i+z} = e^{ix}$$

   Constater en particulier qu'elle n'admet pas de solution si $x = \pi + 2k\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

3. Soit n un entier naturel non-nul. On considère l'équation :

$$(F_n) : \qquad \left(\frac{i-z}{i+z}\right)^n = 1$$

   (a) Résoudre cette équation en utilisant la question 2.
   Justifier qu'elle admet n solutions si n est impair et $(n-1)$ solutions si n est pair.

   (b) On suppose que $n = 5$.
   Développer $(i-z)^5$ et $(i+z)^5$.
   En déduire une nouvelle résolution de l'équation (F_5), puis identifier ces solutions avec celles de la question précédente.

4. Soit x un réel positif. On définit l'équation suivante sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$:

$$(G_x) : \qquad \left|\frac{i-z}{i+z}\right| = \operatorname{th} x$$

   (a) Simplifier les expressions $\dfrac{2\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th}^2 x}$ et $\dfrac{1+\operatorname{th}^2 x}{1-\operatorname{th}^2 x}$.
   En déduire une formule exprimant $\operatorname{th}(2x)$ en fonction de $\operatorname{th} x$.

   (b) Déterminer, en fonction de x, les solutions imaginaires pures de (G_x).

   (c) Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$:

$$(G_x) \quad \Longleftrightarrow \quad |z-a| = b$$

   où a et b sont des complexes à exprimer en fonction de x.

   (d) En déduire une solution géométrique de l'équation (G_x).
   On pourra vérifier que les deux points obtenus dans la question (4b) sont bien dans cet ensemble de solutions.