

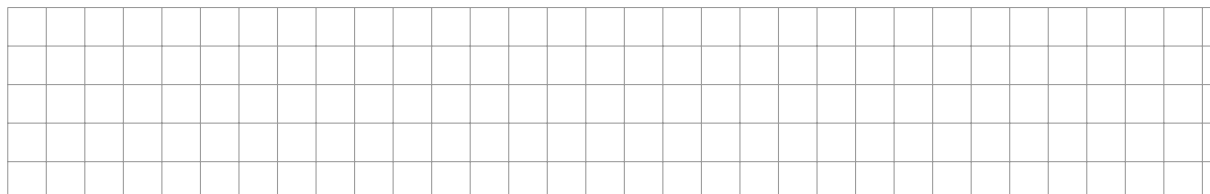
## Chapitre A4

### Fonctions usuelles

## I. Fonctions hyperboliques

### A. Cosinus et sinus hyperboliques

**Définition.** Les fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique, notées sh et ch (ou sinh et cosh), sont définies par :



#### **Propositions.**

(i) La fonction sh est impaire, la fonction ch est paire.

(ii) Ces deux fonctions sont dérivables, et  $\text{sh}' = \text{ch}$ ,  $\text{ch}' = \text{sh}$ .

**Démonstration.** Laissées en exercice. □

#### **Tracé.**



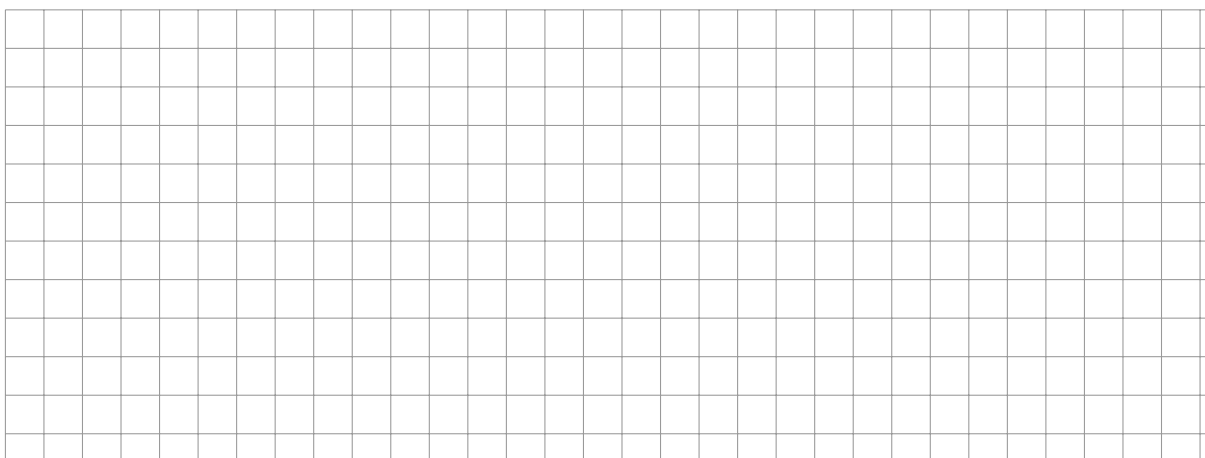
**Remarques.**

- (i) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$  et  $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$   
(ii) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $\operatorname{ch} x \geq 1$   
(iii) La fonction  $\operatorname{sh}$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

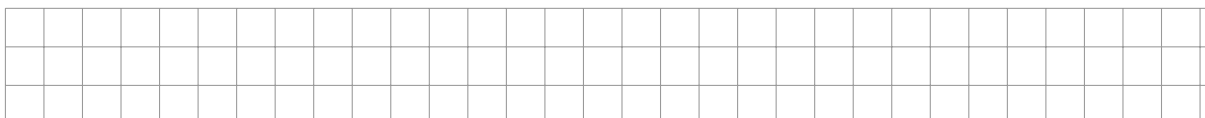
**Proposition.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

▷ **Exercice 1.**

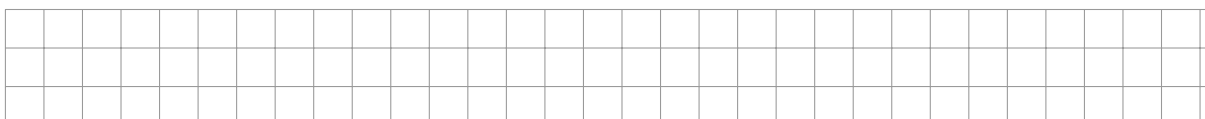
**Remarque.** Les points de coordonnées  $(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$  où  $t$  parcourt  $\mathbb{R}$  sont sur l'hyperbole d'équation  $x^2 - y^2 = 1$ .

**B. Tangente hyperbolique**

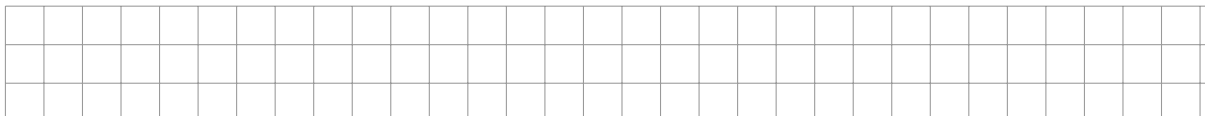
**Définition.** La fonction tangente hyperbolique, notée  $\operatorname{th}$  (parfois  $\operatorname{tanh}$ ), est définie par :



**Proposition.** La fonction  $\operatorname{th}$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , impaire, dérivable de dérivée :

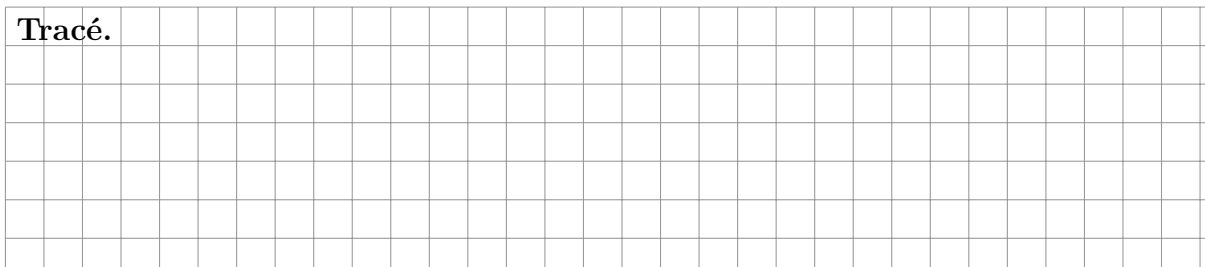


Ses limites sont :



**Démonstration.** Laisée en exercice. □

**Tracé.**





**Proposition.** Pour tout  $x \in [-1, 1]$  :  $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$

Démonstration.

**Proposition.** La fonction arc-sinus est dérivable sur  $] -1, 1[$  de dérivée :

**Remarque.** On peut ajouter que la fonction arcsin n'est dérivable ni en 1 ni en  $-1$ .

Démonstration. On applique le théorème rappelé ci-dessus.

La fonction  $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$  est bijective dérivable. Par théorème sa réciproque arcsin est dérivable sur

$$J' = \{x \in [-1, 1] \mid \sin'(\arcsin x) \neq 0\}$$

et sa dérivée est :

$$\forall x \in J' \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

D'après la propriété précédente :  $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$

On en déduit que  $J' = ] -1, 1[$  et que  $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .  $\square$

**Proposition.** La fonction arcsin est strictement croissante et impaire.

Démonstration.

Tracé.

**B. Arc-cosinus**

**Définition.** On appelle arc-cosinus et on note arccos la fonction réciproque de la fonction  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ .

Ainsi la fonction arccos est définie sur  $[-1, 1]$  par :

$$\begin{aligned} \text{arccos} : [-1, 1] &\longrightarrow [0, \pi] \\ x &\longmapsto \theta \quad \text{tel que} \quad \cos \theta = x \end{aligned}$$

**Remarques.**

- (i) Effectivement la fonction cosinus réalise une bijection de  $[0, \pi]$  dans  $[-1, 1]$ .
- (ii) On note par commodité  $\mathbb{R}$  l'ensemble d'arrivée.

$$\text{arccos} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mais} \quad \forall x \in [-1, 1] \quad \text{arccos } x \in [0, \pi]$$

**Propositions.**

(i)	$\forall x \in [0, \pi]$	$\forall y \in [-1, 1]$	$y = \cos x$	$\iff$	$x =$
(ii)	$\forall x \in$	$\text{arccos } \cos x = x$	$\forall y \in$		$\cos \text{arccos } y = y$

**Exemple 2.** Quelques valeurs remarquables.

$\text{arccos } \frac{1}{2} =$	$\text{arccos } 1 =$	$\text{arccos } 0 =$	$\text{arccos } \left(-\frac{1}{2}\right) =$	$\text{arccos } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$
--------------------------------	----------------------	----------------------	--	---

**Proposition.** Pour tout  $x \in [-1, 1]$  :  $\sin(\text{arccos } x) = \sqrt{1 - x^2}$

<u>Démonstration.</u>	
-----------------------	--



**C. Arc-tangente**

**Définition.** On appelle arc-tangente et on note  $\arctan$  la fonction réciproque de la fonction  $\tan : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

Ainsi la fonction  $\arctan$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\longrightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \\ x &\longmapsto \theta \quad \text{tel que} \quad \tan \theta = x \end{aligned}$$

**Remarques.**

(i) Effectivement la fonction tangente réalise une bijection de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  dans  $\mathbb{R}$ .

(ii) On note par commodité  $\mathbb{R}$  l'ensemble d'arrivée.

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mais} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \arctan x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

**Propositions.**

	$(i) \quad \forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$\forall y \in \mathbb{R}$	$y = \tan x \iff x =$	
	$(ii) \quad \forall x \in$	$\arctan \tan x = x$	$\forall y \in$	$\tan \arctan y = y$

**Exemple 3.** Quelques valeurs remarquables.

$\arctan 1 =$	$\arctan \sqrt{3} =$	$\arctan 0 =$	$\arctan \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) =$
---------------	----------------------	---------------	--

**Proposition.** La fonction arc-tangente est dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée :

--

**Démonstration.** La fonction  $\tan : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  est bijective dérivable. Par théorème sa réciproque  $\arctan$  est dérivable sur

$$J' = \{x \in \mathbb{R} \mid \tan'(\arctan x) \neq 0\}$$

et sa dérivée est :

$$\forall x \in J' \quad \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)}$$

Or  $\tan'(\arctan x) = 1 + \tan^2(\arctan x) = 1 + x^2$ .

On obtient donc  $J' = \mathbb{R}$  et la formule pour la dérivée. □

**Proposition.** La fonction arctan est strictement croissante et impaire. Ses limites en  $\pm\infty$  sont  $\pm\frac{\pi}{2}$ .

Démonstration. La fonction arctan est strictement croissante car sa dérivée  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$  est strictement positive.

On démontre qu'elle est impaire de la même façon que pour la fonction arcsin.

Enfin, comme  $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan t = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ ,

et comme  $\lim_{t \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan t = -\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ . □

**Tracé.**

**Proposition.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  :

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Démonstration.

**Exemple 4.** Soit  $z = x + iy$  un complexe non imaginaire pur (i.e.,  $x \neq 0$ ).

Si $x > 0$ alors $\arg z =$	Si $x < 0$ alors $\arg z =$
-----------------------------	-----------------------------

▷ **Exercice 3.**



### III. Autres fonctions classiques

#### A. Valeur absolue

**Définition.** On définit la fonction valeur absolue sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

**Propositions.**

(i) La fonction valeur absolue est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

(ii) La fonction valeur absolue est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{d|x|}{dx} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

(iii) La fonction valeur absolue est paire.

**Tracé.**



#### B. Partie entière

**Définition.** Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  on appelle partie entière de  $x$  et on note  $[x]$  l'entier  $n$  tel que  $n \leq x < n + 1$ .

On obtient une fonction  $x \mapsto [x]$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

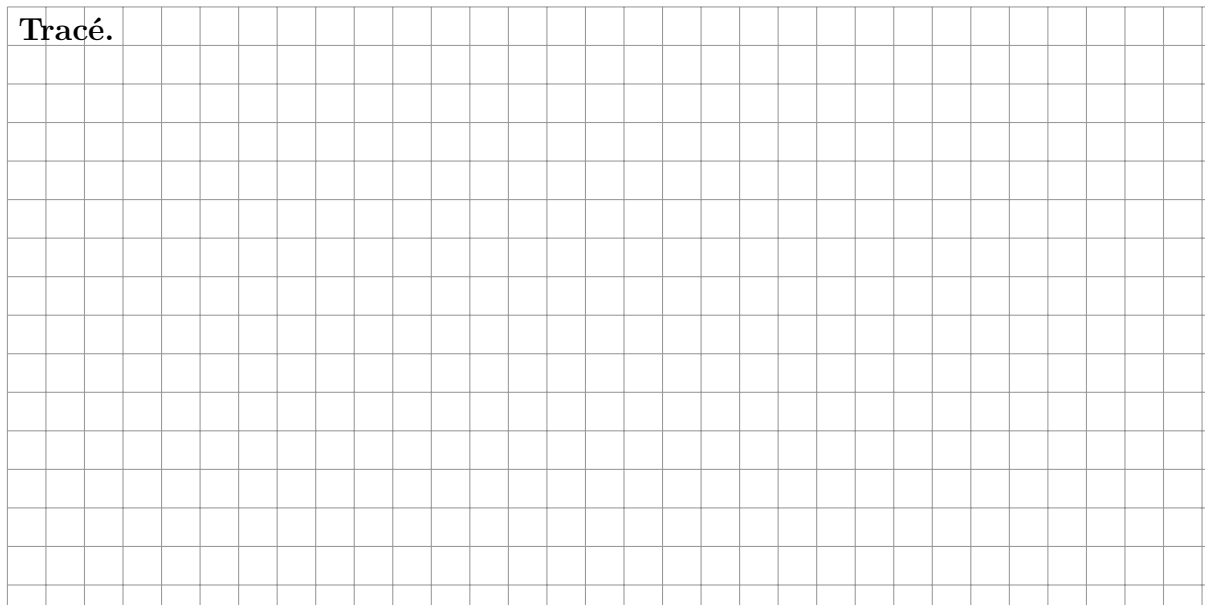
**Exemple 5.**

$[\pi] =$	$[-\pi] =$	$\left[\frac{a}{b}\right]$
-----------	------------	----------------------------

**Remarques.**

(i)	Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ :	$n = [x] \iff x \in$
(ii)	Par définition :	$\forall x \in \mathbb{R} \quad [x] \leq x < [x] + 1$
	Cet encadrement donne :	$\forall x \in \mathbb{R} \quad < [x] \leq$

**Tracé.**



**Remarque.** La fonction partie entière n'est pas continue.

Plus précisément elle est continue en tout point de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  mais ne l'est pas en tout point de  $\mathbb{Z}$ .

Par exemple en 1 elle n'est pas continue car :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ <}} [x] = 0 \neq [1]$$

**Proposition.** *La fonction partie entière est croissante.*

Démonstration. Soit  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $x \leq y$ . On sait que :

$$x - 1 < [x] \leq x \quad \text{et} \quad [y] \leq y < [y] + 1$$

Par transitivité :

$$[x] < [y] + 1$$

Comme  $[x]$  et  $[y]$  sont entiers alors  $[x] \leq [y]$ .

Ceci étant vrai pour tous réels  $x$  et  $y$  tels que  $x \leq y$ , la fonction est croissante.  $\square$

**Exemple 6.** Le nombre de chiffres de l'écriture décimale d'un entier naturel  $N$  est  $[\log N] + 1$ .

▷ **Exercices 4, 5.**