Chapitre A4
Fonctions usuelles

I. Fonctions hyperboliques

A. Cosinus et sinus hyperboliques

Définition. Les fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique, notées sh et ch (ou sinh et cosh), sont définies par :

Propositions.

(i) La fonction sh *est impaire, la fonction* ch *est paire.*

(ii) Ces deux fonctions sont dérivables, et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$, $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$.

Démonstration. Laissées en exercice. □

Tracé.

Remarques.

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$ et $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{ch} x \geqslant 1$

(iii) La fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$:* $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

▷ **Exercice 1.**

Remarque. Les points de coordonnées $(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ où t parcourt $\mathbb{R}$ sont sur l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$.

B. Tangente hyperbolique

Définition. La fonction tangente hyperbolique, notée th (parfois tanh), est définie par :

Proposition. *La fonction* th *est définie sur* $\mathbb{R}$*, impaire, dérivable de dérivée :*

Ses limites sont :

Démonstration. Laissée en exercice. □

Tracé.

II. Fonctions trigonométriques réciproques

Théorème de dérivabilité de la réciproque.
Soit I et J deux intervalles et $f : I \to J$ une bijection.
Si f est dérivable sur I alors f^{-1} est dérivable sur :

$$J' = \left\{ y \in J \mid f'(f^{-1}(y)) \neq 0 \right\}$$

Sa dérivée est :

A. Arc-sinus

Définition. On appelle arc-sinus et on note arcsin la fonction réciproque de la fonction $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$.
Ainsi la fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$ par :

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1,1] &\longrightarrow \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \\ x &\longmapsto \theta \quad \text{tel que} \quad \sin\theta = x \end{aligned}$$

Remarques.
(i) Effectivement la fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1, 1]$.
(ii) On note par commodité $\mathbb{R}$ l'ensemble d'arrivée.

$$\arcsin : [-1,1] \to \mathbb{R} \qquad \text{mais} \qquad \forall x \in [-1,1] \quad \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Propositions.

(i) $\forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \quad \forall y \in [-1, 1] \qquad y = \sin x \iff x =$

(ii) $\forall x \in \qquad \arcsin \sin x = x \qquad \forall y \in \qquad \sin \arcsin y = y$

Exemple 1. Quelques valeurs remarquables.

$\arcsin \frac{1}{2} = \qquad \arcsin 1 = \qquad \arcsin 0 = \qquad \arcsin -\frac{\sqrt{3}}{2} = \qquad \arcsin \sqrt{2} =$

Proposition. *Pour tout* $x \in [-1,1]$ *:* $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

Démonstration.

Proposition. *La fonction arc-sinus est dérivable sur* $]-1,1[$ *de dérivée :*

Remarque. On peut ajouter que la fonction arcsin n'est dérivable ni en 1 ni en -1.

Démonstration. On applique le théorème rappelé ci-dessus.

La fonction $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ est bijective dérivable. Par théorème sa réciproque arcsin est dérivable sur

$$J' = \{\, x \in [-1,1] \mid \sin'(\arcsin x) \neq 0 \}$$

et sa dérivée est :

$$\forall x \in J' \qquad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

D'après la propriété précédente : $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

On en déduit que $J' =]-1,1[$ et que $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. □

Proposition. *La fonction* arcsin *est strictement croissante et impaire.*

Démonstration.

Tracé.

B. Arc-cosinus

Définition. On appelle arc-cosinus et on note arccos la fonction réciproque de la fonction $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$.
Ainsi la fonction arccos est définie sur $[-1, 1]$ par :

$$\begin{aligned} \arccos : [-1,1] &\longrightarrow [0,\pi] \\ x &\longmapsto \theta \quad \text{tel que} \quad \cos\theta = x \end{aligned}$$

Remarques.
(i) Effectivement la fonction cosinus réalise une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.
(ii) On note par commodité $\mathbb{R}$ l'ensemble d'arrivée.

$$\arccos : [-1,1] \to \mathbb{R} \qquad \text{mais} \qquad \forall x \in [-1,1] \quad \arccos x \in [0,\pi]$$

Propositions.

(i) $\forall x \in [0, \pi]$ $\quad \forall y \in [-1, 1]$ $\quad y = \cos x \iff x =$

(ii) $\forall x \in$ $\quad \arccos\cos x = x$ $\quad \forall y \in$ $\quad \cos\arccos y = y$

Exemple 2. Quelques valeurs remarquables.

$\arccos \frac{1}{2} =$ $\quad \arccos 1 =$ $\quad \arccos 0 =$ $\quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) =$ $\quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

Proposition. *Pour tout* $x \in [-1, 1]$ *:* $\quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$

Démonstration.

Proposition. *La fonction arc-cosinus est dérivable sur* $]-1,1[$ *de dérivée :*

Remarque. On peut ajouter que la fonction arccos n'est dérivable ni en 1 ni en -1.

Démonstration. La fonction $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ est bijective dérivable. Par théorème sa réciproque arccos est dérivable sur

$$J' = \{x \in [-1,1] \mid \cos'(\arccos x) \neq 0\}$$

et sa dérivée est :

$$\forall x \in J' \qquad \arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)}$$

D'après la proposition précédente : $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

On obtient donc $J' =]-1,1[$ et la formule pour la dérivée. □

Proposition. *La fonction* arccos *est strictement décroissante,* **ni paire ni impaire**.

Démonstration.	**Tracé.**

Proposition. *Pour tout* $x \in [-1,1]$ *:*

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

Démonstration. Deux méthodes. □

▷ **Exercice 2.**

C. Arc-tangente

Définition. On appelle arc-tangente et on note arctan la fonction réciproque de la fonction $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$.
Ainsi la fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\longrightarrow \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\\ x &\longmapsto \theta \quad \text{tel que} \quad \tan\theta = x \end{aligned}$$

Remarques.
(i) Effectivement la fonction tangente réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$.
(ii) On note par commodité $\mathbb{R}$ l'ensemble d'arrivée.

$$\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{mais} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Propositions.

(i) $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad y = \tan x \iff x =$

(ii) $\forall x \in \qquad \arctan\tan x = x \qquad \forall y \in \qquad \tan\arctan y = y$

Exemple 3. Quelques valeurs remarquables.

$\arctan 1 =$ $\qquad \arctan\sqrt{3} =$ $\qquad \arctan 0 =$ $\qquad \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) =$

Proposition. *La fonction arc-tangente est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée :*

Démonstration. La fonction $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est bijective dérivable. Par théorème sa réciproque arctan est dérivable sur

$$J' = \{x \in \mathbb{R} \mid \tan'(\arctan x) \neq 0\}$$

et sa dérivée est :

$$\forall x \in J' \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)}$$

Or $\tan'(\arctan x) = 1 + \tan^2(\arctan x) = 1 + x^2$.

On obtient donc $J' = \mathbb{R}$ et la formule pour la dérivée. $\square$

Proposition. *La fonction* arctan *est strictement croissante et impaire. Ses limites en* $\pm\infty$ *sont* $\pm\frac{\pi}{2}$.

Démonstration. La fonction arctan est strictement croissante car sa dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est strictement positive.

On démontre qu'elle est impaire de la même façon que pour la fonction arcsin.

Enfin, comme $\lim\limits_{\substack{t\to\frac{\pi}{2} \\ <}} \tan t = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$,

et comme $\lim\limits_{\substack{t\to-\frac{\pi}{2} \\ >}} \tan t = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$. □

Tracé.

Proposition. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$ *:*

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Démonstration.

Exemple 4. Soit $z = x + iy$ un complexe non imaginaire pur (*i.e.*, $x \neq 0$).

Si $x > 0$ alors $\arg z =$ Si $x < 0$ alors $\arg z =$

▷ **Exercice 3.**

III. Autres fonctions classiques

A. Valeur absolue

Définition. On définit la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

Propositions.

(i) La fonction valeur absolue est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \frac{\mathrm{d}|x|}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

(iii) La fonction valeur absolue est paire.

Tracé.

B. Partie entière

Définition. Pour tout x de $\mathbb{R}$ on appelle partie entière de x et on note $\lfloor x \rfloor$ l'entier n tel que $n \leqslant x < n+1$.

On obtient une fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exemple 5.

$\lfloor \pi \rfloor =$ $\lfloor -\pi \rfloor =$ $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$

Remarques.

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$: $n = \lfloor x \rfloor \iff x \in$

(ii) Par définition : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$

Cet encadrement donne : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad < \lfloor x \rfloor \leqslant$

Tracé.

Remarque. La fonction partie entière n'est pas continue.

Plus précisément elle est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ mais ne l'est pas en tout point de $\mathbb{Z}$.

Par exemple en 1 elle n'est pas continue car :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \lfloor x \rfloor = 0 \neq \lfloor 1 \rfloor$$

Proposition. *La fonction partie entière est croissante.*

Démonstration. Soit x et y deux réels tels que $x \leqslant y$. On sait que :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \qquad \text{et} \qquad \lfloor y \rfloor \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1$$

Par transitivité :

$$\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor + 1$$

Comme $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor y \rfloor$ sont entiers alors $\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$.

Ceci étant vrai pour tous réels x et y tels que $x \leqslant y$, la fonction est croissante. $\square$

Exemple 6. Le nombre de chiffres de l'écriture décimale d'un entier naturel N est $\lfloor \log N \rfloor + 1$.

▷ **Exercices 4, 5.**