

## Feuille de T. D. A4

### Fonctions usuelles

#### Exercices de cours

- ① Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :
- $$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x$$
- Donner une formule pour  $\operatorname{th} 2x$ .
- ② Calculer  $\arcsin \sin 2\pi$      $\arccos \cos -\frac{11\pi}{6}$   
 $\arccos \sin \frac{2\pi}{3}$      $\arcsin \cos \frac{47\pi}{3}$
- ③ Démontrer que :
- $$\forall x \in ]-1, 1[ \quad \tan \arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
- $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin \operatorname{arctan} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
- ④ Les relations suivantes sont-elles valables pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ?  
 $[-x] = -[x] \quad [x+y] = [x]+[y] \quad [xy] = [x][y]$
- ⑤ Démontrer que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :
- $$[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$$

#### Travaux dirigés

- ① Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes.
- a.  $\operatorname{sh} x = \sqrt{3}$                       b.  $\operatorname{ch} x = \sqrt{3}$   
c.  $\operatorname{th} x = \frac{2}{3}$                             d.  $12 \operatorname{ch} x = 25 \operatorname{th} x$   
e.  $\operatorname{ch} x = \frac{5}{3}$                             f.  $19 \operatorname{sh} x - 16 \operatorname{ch} x = 4$   
g.  $3 \operatorname{ch} 2x - 4 \operatorname{ch} x = 7$             h.  $16 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 15$   
i.  $\operatorname{sh} 2x = \operatorname{ch} x$                     j.  $\operatorname{sh} x + \frac{2}{\operatorname{sh} x} = 3$   
k.  $6 \operatorname{ch} x - 7 \operatorname{sh} x = a \quad (a \in \mathbb{R})$
- ② Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système
- $$\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = a \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = b \end{cases}$$
- pour les couples  $(a, b)$  valant  $(3, 4)$ ,  $(2, 1)$ , et  $(3, 1)$ .
- ③ Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$  calculer :
- $$C_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{ch}(kx) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{sh}(kx)$$
- ④ Dériver les fonctions suivantes.
- a.  $f(x) = \operatorname{sh} x + \frac{1}{3} \operatorname{sh}^3 x$     b.  $f(x) = \frac{1}{3} \operatorname{ch}^3 x - \operatorname{ch} x$   
c.  $f(x) = \operatorname{th} x - \frac{1}{3} \operatorname{th}^3 x$     d.  $f(x) = \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{\operatorname{sh} x + \sin x}$   
e.  $f(x) = \operatorname{ch} x \cos x + \operatorname{sh} x \sin x$

- ⑤ Calculer les réels suivants.
- $$a = \cos \left( \arcsin \frac{4}{5} \right) \quad b = \sin \left( \arccos \frac{5}{13} \right)$$
- $$c = \sin \left( 2 \arcsin \frac{1}{7} \right) \quad d = \tan \left( \arcsin \left( -\frac{\sqrt{5}}{3} \right) \right)$$
- $$e = \cos \left( \operatorname{arctan} \left( -\frac{3}{4} \right) \right) \quad f = \sin \left( \operatorname{arctan} \frac{\sqrt{7}}{3} \right)$$
- $$g = \tan \left( 2 \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \quad h = \sin \left( 2 \operatorname{arctan} 3 \right)$$
- $$i = \tan \left( \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}} \right)$$
- ⑥ Étudier les fonctions suivantes.
- a.  $f(x) = 5 \operatorname{ch} x - 4 \operatorname{sh} x$     b.  $f(x) = \arccos(2x^2 - 1)$   
c.  $f(x) = \operatorname{arctan} \operatorname{sh} x$             d.  $f(x) = \sin(2 \operatorname{arctan} e^x)$   
e.  $f(x) = \arcsin \operatorname{th} x + \arccos \frac{1}{\operatorname{ch} x}$   
f.  $f(x) = \arcsin \frac{\sqrt{x}}{x+1}$             g.  $f(x) = \operatorname{arctan} \frac{x-1}{x+1}$
- ⑦ Résoudre les équations suivantes sur  $\mathbb{R}$ .
- a.  $\arcsin x = \arcsin \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}$   
b.  $\arccos \frac{x+1}{2} = \arcsin x$   
c.  $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin x$   
d.  $\arcsin x = 2 \arccos x$   
e.  $\arccos(x^2) + \arccos(1-x^2) = \frac{\pi}{2}$   
f.  $\arcsin x = \operatorname{arctan} 2x$   
g.  $\operatorname{arctan} x + \operatorname{arctan} 3x = \frac{\pi}{2}$
- ⑧ Calculer :
- $$a = \operatorname{arctan} 2 + \operatorname{arctan} 3 \quad \text{et} \quad b = \operatorname{arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{arctan} \frac{1}{3}$$
- $$c = \operatorname{arctan} 2 + \operatorname{arctan} 5 + \operatorname{arctan} 8$$
- $$d = 4 \operatorname{arctan} \frac{1}{5} - \operatorname{arctan} \frac{1}{239}$$
- ⑨ Démontrer que pour tout  $x \in ]-1, 1[$  :
- $$\arcsin x = \operatorname{arctan} \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$
- Peut-on exprimer de façon aussi simple  $\arccos x$  en fonction d'un arc-tangente ?
- ⑩ Pour tout  $x \in [1, +\infty[$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose :
- $$A(x) = \operatorname{arctan} \frac{x}{x+1} - \operatorname{arctan} \frac{x-1}{x}$$
- et  $S_n = \sum_{k=1}^n \operatorname{arctan} \frac{1}{2k^2}$
- a. Démontrer que pour tout  $x \in [1, +\infty[$ ,  $A(x)$  appartient à  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .  
b. Simplifier  $A(x)$  en calculant sa tangente.  
c. Calculer  $S_n$ .

**11** On définit les fonctions :

$$f_1 = \arcsin \circ \sin$$

$$f_2 = \arccos \circ \cos$$

$$f_3 = \arctan \circ \tan$$

- Déterminer l'ensemble de définition et une période de  $f_3$ , puis tracer sa courbe.
- Déterminer l'ensemble de définition, une période et la parité de  $f_2$ , puis tracer sa courbe.
- Déterminer l'ensemble de définition et une période de  $f_1$ , calculer  $f_1(\pi - x)$ , puis tracer sa courbe.
- Démontrer que pour tout  $x$  dans l'ensemble de définition de  $f_3$  :

$$f_3(x) = x - \pi \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

**12** On note :

$$f(x) = \ln \left( \tan \left( \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{1}{\operatorname{ch} x} \right) \right) \right)$$

- Démontrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .
- Simplifier l'expression de  $f(x)$ .

*Indication : calculer  $\frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ .*

**13** Pour tout réel  $x$  on note  $\lceil x \rceil$  le plus petit entier supérieur ou égal à  $x$ , appelé *plafond* de  $x$ .

Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$

**14** Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $m \in \mathbb{N}^*$  :

$$m\lfloor x \rfloor \leq \lfloor mx \rfloor \leq m\lfloor x \rfloor + m - 1$$

En déduire que :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$