Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2024-2025**
MPSI – Mathématiques

Programme de colles
Semaine 6
du 4 au 8 novembre 2024

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.
2. Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.
3. Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

Exercices

Chapitre B1. Les nombres complexes

I. Généralités
II. Angles
III. Équations algébriques
IV. L'exponentielle complexe

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitre B2 (Ensembles).

Chapitre B1. **Les nombres complexes**

I. Généralités

Parties réelle et imaginaire, opérations sur les nombres complexes, représentation dans le plan, affixe et image, droite des réels, des imaginaires purs.

Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Formules $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$. Caractérisation des réels et des imaginaires purs ($\bar{z} = z$ et $\bar{z} = -z$).

Module, compatibilité avec la multiplication. Inégalités triangulaires. Lemme pour la démonstration : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\bar{z}| = |z|$ et $-|z| \leqslant \operatorname{Re}(z) \leqslant |z|$, $-|z| \leqslant \operatorname{Im}(z) \leqslant |z|$.

Le module de $a - b$ est la distance de A à B. Définitions : cercle, disque ouvert et fermé dans le plan complexe.

II. Angles

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Il est stable par multiplication, passage à l'inverse. On pose $e^{it} = \cos t + i \sin t$. Alors $e^{it}e^{it'} = e^{i(t+t')}$. Formules d'Euler.

Argument : définition, non-unicité, propriétés ($\arg(zz') = ...$). Aspect géométrique de la multiplication de deux complexes. Formes algébriques et exponentielles d'un complexe. Description géométrique des applications $z \mapsto z + b$, $z \mapsto \lambda z$, $z \mapsto e^{i\theta}z$ et $z \mapsto \bar{z}$.

Applications à la trigonométrie : formules de somme, de duplication, de transformation de produit en somme, de transformation de somme en produit, formules en $t = \tan(x/2)$. Formule de Moivre, calcul des cosinus, sinus de nx où n est un entier naturel. Linéarisation d'une expression trigonométrique, petits calculs d'intégrales. Simplification de $1 + e^{it}$, $e^{ip} + e^{iq}$ en factorisant par l'exponentielle de l'angle moyen. Simplification de $a \cos x + b \sin x$ (transformation de Fresnel).

Applications à la géométrie : conditions nécessaires et suffisantes sur les affixes pour que trois points soient alignés, deux vecteurs soient parallèles ou orthogonaux.

III. Equations algébriques.

Equations du second degré à coefficients complexes. Somme et produit des racines.

Racines de l'unité, notation $\mathbb{U}_n$, exemples. Somme (0) et produit ($(-1)^{n-1}$).

Racines n-èmes d'un complexe quelconque.

IV. L'exponentielle complexe

Définition : $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Propriétés, l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective, non injective (première introduction de ces notions, sans donner les définitions).