

## Chapitre A5

### Primitives

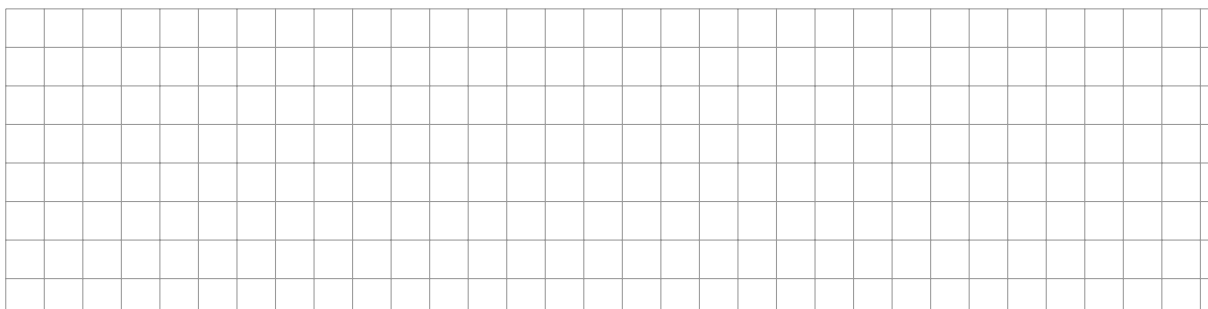
### I. Intégrales et primitives

#### A. Intégrales

**Définition.** Soit  $I$  un intervalle,  $a$  et  $b$  deux points de  $I$  tels que  $a < b$ , et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. L'intégrale

$$\int_a^b f(t) dt \quad \text{ou} \quad \int_a^b f$$

est l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$ , et la courbe de  $f$ . Les parties situées en-dessous de l'axe des abscisses sont comptées négativement.

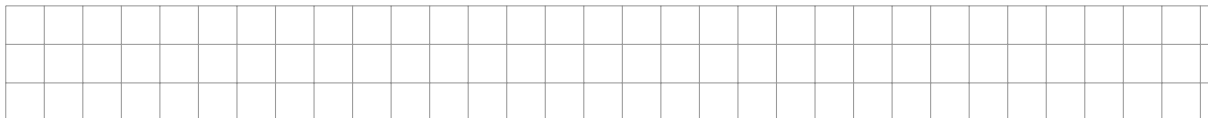


Si  $a > b$  alors on note :

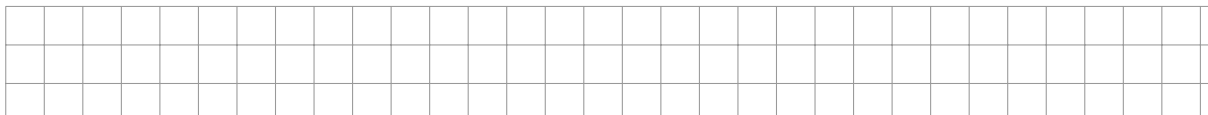
$$\int_a^b f(t) dt = -\int_b^a f(t) dt$$

**Remarque.** La variable  $t$  est muette :  $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f$

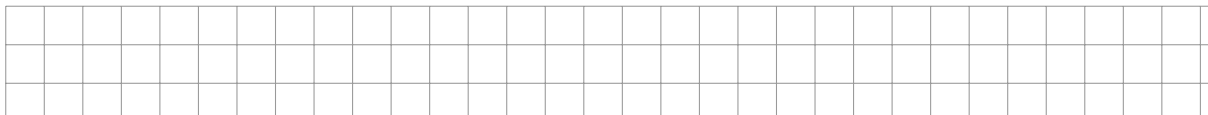
**Proposition - Relation de Chasles.** Soit  $a, b, c$  sont trois points quelconques d'un intervalle  $I$  et  $f$  est une fonction continue sur  $I$ . Alors :



**Proposition - Linéarité de l'intégrale.** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $[a, b]$ , et  $\lambda$  un réel. Alors :



**Proposition - Croissance de l'intégrale.** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$ , et  $a$  et  $b$  sont deux points de  $I$  tels que  $a < b$ .





**Exemple 3.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on pose :  $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$

La fonction  $f : x \mapsto e^{x^2}$  est continue sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ , donc d'après le théorème fondamental la fonction  $F$  est une primitive de  $f$ , i.e.,  $F$  est dérivable, de dérivée :

$$F'(x) =$$

**Corollaire.** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ , et  $a, b$  deux points de  $I$ . Soit  $F$  une primitive de  $f$ . Alors :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

On note  $\left[ F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a)$ .

Démonstration.

**Exemple 2 (suite).**

(i)  $\int_6^9 4 dt =$

(ii)  $\int_0^2 t dt =$

(iii)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt =$

(iv)  $\int_0^1 e^t dt =$

(v)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t dt =$

## II. Calculs de primitives

### A. Primitives usuelles

La tableau suivant donne les primitives à connaître. Aucune d'entre elles n'est unique : il est toujours possible de leur ajouter une constante  $C$ .

Fonction	Primitive	Ensemble ou condition de validité
$x^\alpha$ ( $\alpha \neq -1$ )		$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_-$ $\mathbb{R}_+^*$ sinon
$\frac{1}{x}$		$\mathbb{R}^*$
$e^x$		$\mathbb{R}$
$\cos x$		$\mathbb{R}$
$\sin x$		$\mathbb{R}$
$\tan x$		$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\operatorname{ch} x$		$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$		$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$] -1, 1[$
$u'(ax+b)$		$u$ dérivable $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $a \neq 0$
$u'u^\alpha$		$u$ dérivable $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \neq -1$
$\frac{u'}{u}$		$u$ dérivable
$u'e^u$		$u$ dérivable
$u'.f \circ u$		$u$ dérivable $F$ primitive de $f$



**D. Fonctions rationnelles**

**Définitions.** Une fraction rationnelle est un quotient de deux polynômes.

Une fonction rationnelle est un quotient de deux fonctions polynômiales.

**Exemple 9.**  $I = \int_0^3 \frac{x+2}{x+1} dx$        $J = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x+3}{x^2+1} dx$

▷ **Exercices 5, 6.**

**Méthode.** Calcul d'une intégrale de la forme  $\int \frac{\lambda x + \mu}{ax^2 + bx + c} dx$  :

- Calculer le discriminant du trinôme  $ax^2 + bx + c$ .
- Selon qu'il soit strictement positif, nul ou strictement négatif, appliquer une des trois méthodes de l'exemple ci-dessous.

**Exemple 10.**

(i) ( $\Delta > 0$ )  $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 2x - 3}$

(ii) ( $\Delta = 0$ )  $J_1 = \int_0^3 \frac{dx}{x^2 + 4x + 4}$       puis       $J_2 = \int_0^3 \frac{4x+1}{x^2+4x+4} dx$

(iii) ( $\Delta < 0$ )  $K_1 = \int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 6x + 12}$       puis       $K_2 = \int_0^3 \frac{x+6}{x^2 - 6x + 12} dx$

▷ **Exercices 7, 8.**

**Remarque.** Plus généralement, si  $a_1, \dots, a_n$  sont  $n$  réels distincts et si  $P$  est une fonction polynomiale de degré strictement inférieur à  $n$  alors il existe des scalaires  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tels que :

$$\frac{P(x)}{(x-a_1) \cdots (x-a_n)} = \frac{\alpha_1}{x-a_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x-a_n}$$

**Exemple 11.**  $I = \int_3^7 \frac{x+2}{(x^2-1)(x+5)} dx$

