

Programme de colles
Semaine 7
du 10 au 14 novembre 2025

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Nouvelle démonstration de la formule de Pascal.
2. Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.
3. Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.
4. Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

Exercices

Chapitre A4. Calculs de limites

- I. Suites récurrentes
- II. Relations de comparaison

Chapitre B3. Ensembles

- I. Ensembles
- II. Applications
- III. *Relations binaires* *Hors programme*
- IV. *Ensembles finis* *Hors programme*

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitre B3 (Ensembles).

Chapitre A4. Calculs de limites

I. Suites récurrentes

Théorèmes admis : Théorème d'encadrement, si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite alors la suite (u_n) converge vers cette limite, théorème de la limite monotone, composition de limites, si f est continue et (u_n) converge vers a alors $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

Suites récurrentes : itératrice, intervalle stable, existence de la suite. Si f est croissante alors (u_n) est monotone. Si (u_n) converge et f est continue alors sa limite est un point fixe de f .

II. Relations de comparaison

Négligeabilité, équivalence et domination pour les suites et les fonctions. Notations $u_n \sim v_n$, petit o , grand O .

Nouvelle écriture des croissances comparées avec ajout de $a^n = o(n!)$. Équivalents usuels.

Chapitre B3. Ensembles

I. Ensembles

Ensemble, éléments. Appartenance, inclusion, ensemble vide, partie ou sous-ensemble. Ensemble $\mathcal{P}(E)$. Complémentaire, intersection, réunion, différence. Distributivité de \cap et \cup l'une par rapport à l'autre. Lois de de Morgan. Produit cartésien fini. Exemples des ensembles \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 .

II. Applications

Ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des applications d'un ensemble E vers un ensemble F . Ensembles de départ, d'arrivée, graphe, image et antécédent d'un élément. Identité de E , restriction, prolongement. Image d'une partie de E , image réciproque d'une partie de F .

Injection, surjection, bijection. Stabilité par composition. Fonction réciproque d'une bijection, unicité, caractérisation : $f : E \rightarrow F$ est bijective si et seulement si il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $f \circ g = \text{Id}_F$ et $g \circ f = \text{Id}_E$. On a alors $g = f^{-1}$, et l'unicité de f^{-1} . Réciproque d'une composée.

Cas des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} : théorème de la bijection, théorème de dérivation de la réciproque.

III. Relations binaires

Relation d'équivalence. Classe d'équivalence, elles réalisent une partition.

Relation d'ordre, total ou partiel. Majorant, minorant, maximum, minimum d'une partie.

IV. Ensembles finis

Cardinal d'un ensemble fini (et uniquement fini). Lien avec l'inclusion, les applications injectives et surjectives. Cardinal d'une union, du complémentaire, du produit cartésien, de l'ensemble des applications de E dans F , de l'ensemble des parties de E .

Nombre de p -listes d'éléments d'un ensemble fini, de p -listes d'éléments distincts (sans le mot "arrangement", et sans la notation A_n^p). Nombre de permutations.

Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments. Formule du binôme et autres, nouvelles démonstrations.