Chapitre B3
Logique

I. Logique

A. Calcul propositionnel

Définition. Une proposition ou assertion est un énoncé qui peut prendre deux valeurs : vrai (V) ou faux (F).

Exemple 1.
- P : 2 est un entier.
- Q : 2,5 est un entier.
- R : Le triangle ABC est rectangle en A.
- S : Un élève de la classe s'appelle Édouard.
- T : J'ai travaillé tous les jours de la semaine.

Définition (Négation). Soit P une proposition. On appelle négation de P la proposition qui est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie. Elle se note $\neg P$ et on la lit «non P».

Exemple 1 (suite).
- $\neg P$: 2 n'est pas un entier.
- $\neg Q$: 2,5 n'est pas un entier.
- $\neg R$: Le triangle ABC n'est pas rectangle en A.
- $\neg S$: Aucun élève de la classe ne s'appelle Édouard.
- $\neg T$: Je n'ai pas travaillé au moins un jour de la semaine.

Proposition. *Pour toute proposition P :* $\quad \neg(\neg P) = P$

Définitions (Conjonction et Disjonction). Soit P et Q deux propositions.

On note (P et Q) ou $(P \wedge Q)$ la proposition qui est vraie si P et Q sont toutes les deux vraies, et fausse sinon.

On note (P ou Q) ou $(P \vee Q)$ la proposition qui est vraie si P ou Q est vraie, et fausse sinon.

Remarque. En mathématiques le *ou* est inclusif : (P ou Q) est vraie si et seulement si l'une des deux propositions P et Q est vraie, donc en particulier si les deux sont vraies.

Exemple 2. $(x \geqslant 2 \text{ et } x \leqslant 5)$ est la proposition $2 \leqslant x \leqslant 5$

$(x > 0 \text{ ou } x < 0)$ est la proposition $x \in \mathbb{R}^*$

Définition. Les tables de vérité des trois opérations définies ci-dessus sont :

P	$\neg P$
V	
F	

P	Q	P et Q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

P	Q	P ou Q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Remarque (Commutativités). Pour toutes propositions P et Q :

$$(P \text{ et } Q) \ = \ (Q \text{ et } P) \qquad\qquad (P \text{ ou } Q) \ = \ (Q \text{ ou } P)$$

Proposition (Lois de De Morgan). *Auguste* De Morgan*, Angleterre, 1806 – 1871.*
Pour toutes propositions P et Q :

$$\begin{aligned} \neg(P \text{ et } Q) &= \neg P \text{ ou } \neg Q \\ \neg(P \text{ ou } Q) &= \neg P \text{ et } \neg Q \end{aligned}$$

Exemple 2 (suite). La négation de $(x \geqslant 2 \text{ et } x \leqslant 5)$ est $(x < 2 \text{ ou } x > 5)$
La négation de $(x > 0 \text{ ou } x < 0)$ est $(x \leqslant 0 \text{ et } x \geqslant 0)$
donc $x = 0$

Exemples. La négation de la proposition «j'ai des pommes et des poires» est «je n'ai pas de pomme ou pas de poire».
La négation de «j'ai des pommes ou des poires» est «je n'ai ni pommes ni poires».

Démonstration de la première loi de De Morgan. On utilise une table de vérité :

P	Q	P et Q	$\neg(P$ et $Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P$ ou $\neg Q$

Elle montre bien l'égalité attendue.

La seconde égalité est laissée en exercice. □

Définition (Implication). On note $(P \Rightarrow Q)$ la proposition $(\neg P$ ou $Q)$.

Remarques.

(i) On lit «P implique Q» ou «si P alors Q».
(ii) On dit que P est une *condition suffisante* pour avoir Q, et que Q est une *condition nécessaire* pour avoir P.
(iii) Cette proposition est fausse si et seulement si P est vraie et Q est fausse.
En effet sa table de vérité est :

P	Q	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$

Exemples.

- La propriété $(2 = 2) \Rightarrow (2*0 = 2*0)$ est vraie car on peut multiplier les deux membres d'une égalité par un même nombre.
- La propriété $(2 * 0 = -2 * 0) \Rightarrow (2 = -2)$ est fausse car on ne peut diviser par 0 les deux membres d'une égalité.
- La propriété $(2 = -2) \Rightarrow (2*0 = -2*0)$ est vraie pour la même raison que la première.
- La propriété $(2 = -2) \Rightarrow (2 * 1 = -2 * 1)$ est vraie pour la même raison encore.

Définition. La réciproque de $(P \Rightarrow Q)$ est la proposition $(Q \Rightarrow P)$.

Remarque. La réciproque d'une implication $(P \Rightarrow Q)$ peut être vraie ou fausse, que $(P \Rightarrow Q)$ soit vraie ou fausse.

Exemples.

- Soit $P = (x \geqslant 2)$ et $Q = (x \geqslant 1)$. Alors $(P \Rightarrow Q)$ est vraie mais $(Q \Rightarrow P)$ est fausse.
- Soit $P =$ «Le triangle ABC est rectangle en A» et $Q = (AB^2 + AC^2 = BC^2)$. Alors $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ sont vraies.
- Soit $P =$ «x est entier» et $Q =$ «x est positif». Alors $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ sont fausses.

Définition (Équivalence). On note $(P \Leftrightarrow Q)$ la proposition $(P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P)$.

Remarques.

(i) On lit «P est équivalent à Q», ou «P si et seulement si Q».
(ii) On dit que P est une *condition nécessaire et suffisante* pour avoir Q.
(iii) La proposition $(P \Leftrightarrow Q)$ est vraie si P et Q sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses, et fausse sinon. En effet sa table de vérité est :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$

Définition. La contraposée de $(P \Rightarrow Q)$ est la proposition $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

Proposition. *Une implication et sa contraposée sont équivalentes.*

Exemples.

- Soit $P = (x \geqslant 2)$ et $Q = (x \geqslant 1)$. Alors $(P \Rightarrow Q)$ et $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ sont vraies, car $1 \leqslant 2$.
  En effet $(x \geqslant 2) \Rightarrow (x \geqslant 1)$ et $(x < 1) \Rightarrow (x < 2)$.
- Soit $P =$ «J'ai des pommes» et $Q =$ «J'ai des fruits». Alors $(P \Rightarrow Q)$ et $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ sont vraies : si j'ai des pommes alors j'ai des fruits, si je n'ai pas de fruit alors je n'ai pas de pomme.

Démonstration. On utilise la définition de l'implication et la commutativité de l'opérateur « ou » : $(P \Rightarrow Q) = (\neg P \text{ ou } Q)$

$$(\neg Q \Rightarrow \neg P) \;=\; (\neg(\neg Q) \text{ ou } \neg P) \;=\; (Q \text{ ou } \neg P) \;=\; (\neg P \text{ ou } Q) \;=\; (P \Rightarrow Q)$$

L'égalité est donc démontrée. □

Démonstration par la table de vérité.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$

Les deux dernières colonnes sont bien égales. $\square$

Exercice. Compléter le tableau suivant rappelant les différents opérateurs.

P	Q	$\neg P$	P et Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$

Exercice. Démontrer les lois de De Morgan à l'aide des tables de vérité.

Exercice. Soit P et Q deux propositions. Démontrer que la négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \text{ et } \neg Q)$.

Exercice : Associativités. Démontrer à l'aide de tables de vérité à 8 lignes que pour toutes propositions P, Q, R :

$$(P \text{ et } Q) \text{ et } R \;=\; P \text{ et } (Q \text{ et } R) \qquad\qquad (P \text{ ou } Q) \text{ ou } R \;=\; P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)$$

Exercice : Distributivités. Démontrer à l'aide de tables de vérité à 8 lignes que pour toutes propositions P, Q, R :

$$\begin{aligned} P \text{ ou } (Q \text{ et } R) &= (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R) \\ P \text{ et } (Q \text{ ou } R) &= (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R) \end{aligned}$$

Définition. On note $\top$ la proposition qui est toujours vraie, et on l'appelle tautologie. On note $\bot$ la proposition qui est toujours fausse, et on l'appelle antilogie.

Exemples. Pour toute proposition P :

$$(P \text{ et } \top) \;=\; P \qquad (P \text{ et } \bot) = \bot \qquad (P \text{ ou } \top) \;=\; \top \qquad (P \text{ ou } \bot) = P$$

Exercice. Soit P une proposition. Simplifier $(P \text{ et } \neg P)$ et $(P \text{ ou } \neg P)$.

Exercice. Démontrer avec et sans table de vérité que pour toute proposition P :

$$(\top \Rightarrow P) \;=\; P \qquad (P \Rightarrow \bot) = \neg P \qquad (\top \Leftrightarrow P) \;=\; P \qquad (\bot \Leftrightarrow P) \;=\; \neg P$$

B. Quantificateurs

Définition. Un prédicat est une proposition dont la valeur de vérité dépend d'un ou plusieurs paramètres.

On note $P(x)$ un prédicat dépendant d'un paramètre x appartenant à un ensemble E.

Exemples.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $P(x) : x^2 < 1$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n : \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Définitions (Quantificateur universel, quantificateur existentiel). La proposition

$$\forall x \in E \quad P(x)$$

signifie que la proposition $P(x)$ est vraie pour tout $x \in E$ (ou quel que soit $x \in E$), alors que la proposition :

$$\exists x \in E \quad P(x)$$

signifie que la proposition $P(x)$ est vraie pour au moins un $x \in E$.

Remarques.

(i) La variable x est muette, on peut la remplacer par toute autre variable :

$$(\forall x \in E \quad P(x)) \qquad = \qquad (\forall u \in E \quad P(u))$$
$$(\exists x \in E \quad P(x)) \qquad = \qquad (\exists \xi \in E \quad P(\xi))$$

(ii) On peut ajouter l'unicité au quantificateur existentiel : $(\exists! x \in E\ P(x))$ signifie «il existe un unique x dans E tel que $P(x)$ est vraie».

Proposition. *La négation de* $(\forall x \in E\ P(x))$ *est :* $(\exists x \in E\ \neg P(x))$

La négation de $(\exists x \in E\ P(x))$ *est :* $(\forall x \in E\ \neg P(x))$

Exemples.

- La négation de $(\forall x \in A\ x \geqslant 0)$ est $(\exists x \in A\ x < 0)$.
- La négation de «toutes les poires de cette corbeille sont vertes» est «au moins une poire de cette corbeille n'est pas verte».
- La négation de «un élève de la classe a son nom qui commence par W» est «aucun élève de la classe n'a son nom qui commence par W».

Méthode.

- Pour démontrer que $(\forall x \in E\ P(x))$ est vraie, on considère un élément quelconque x de E, et on démontre que $P(x)$ est vraie pour cet élément.
- Pour démontrer que $(\forall x \in E\ P(x))$ est faux, il suffit de trouver au moins un $x \in E$ tel que $P(x)$ est fausse. On *exhibe un contre-exemple.*
- Pour démontrer que $(\exists x \in E\ P(x))$ est vraie, il suffit de trouver un $x \in E$ tel que $P(x)$ est vraie. On *exhibe un exemple.*
- Pour démontrer que $(\exists x \in E\ P(x))$ est fausse, on montre que la négation est vraie. On considère donc un élément x quelconque de E et on prouve que $P(x)$ est fausse.

Remarque. La propriété $(\forall x \in \varnothing \quad P(x))$ est toujours vraie. En effet, sa négation est $(\exists x \in \varnothing \quad \neg P(x))$, elle est toujours fausse.

▷ **Exercices 1, 2.**

II. Modes de raisonnement

A. Implications et équivalences

Remarque. Si P et $P \Rightarrow Q$ sont vraies alors Q est vraie. C'est le *principe de déduction* ou *modus ponens*.

Remarque. La plupart des théorèmes sont des implications, parfois des équivalences.

Plus précisément, ils sont souvent de la forme :

$$\begin{array}{lll} & \forall x \in E & P(x) \implies Q(x) \\ \text{ou} & \forall x \in E & P(x) \iff Q(x) \end{array}$$

Exemples.

- Si f est dérivable alors f est continue.
- Si $(\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leqslant v_n)$ et $\lim u_n = +\infty$ alors $\lim v_n = +\infty$.
- Soit ABC un triangle. Alors le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Définition. Pour un théorème de la forme $\forall x \in E \quad P(x) \implies Q(x)$, on dit que $P(x)$ est l'*hypothèse* et $Q(x)$ est la *conclusion*.

Exemple : Théorème de la bijection. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est continue et strictement monotone sur I alors $f(I)$ est un intervalle, et f réalise une bijection de I dans $f(I)$.

L'intervalle I est fixé, E est l'ensemble des fonctions f de I dans $\mathbb{R}$: $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

L'hypothèse $P(f)$ est que f est continue et strictement monotone.

La conclusion $Q(f)$ est que $f(I)$ est un intervalle et f réalise une bijection de I dans $f(I)$.

Le théorème de la bijection s'écrit alors : $\forall f \in E \quad P(f) \Rightarrow Q(f)$

Méthode. Pour démontrer une implication $P \Rightarrow Q$ on peut :

- Procéder directement : supposer que P est vraie, démontrer que Q est alors vraie.
- Démontrer la contraposée : supposer que Q est fausse, démontrer que P est alors fausse.
- Raisonner par l'absurde, *i.e.,* supposer que P est vraie et Q est fausse, et arriver à une contradiction. On démontre ainsi que $(P \text{ et } \neg Q)$ est fausse : $(P \text{ et } \neg Q) = \bot$.
  Or la négation de $(P \text{ et } \neg Q)$ est $(\neg P \text{ ou } Q)$ donc $(P \Rightarrow Q)$.

Pour démontrer une équivalence $P \Leftrightarrow Q$ on peut :

- Procéder directement par équivalences successives.
- Démontrer que $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ (double implication).
- Démontrer que $P \Rightarrow Q$ et $\neg P \Rightarrow \neg Q$.

Exemples. Démontrer que :

a. $\forall z \in \mathbb{C} \qquad z \in \mathbb{U} \iff \bar{z} = z^{-1}$

b. Soit $f : E \to F$ une fonction. Alors f est bijective si et seulement si il existe une fonction $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

c. Soit n un entier. Alors n est pair si et seulement si n^2 est pair.

B. Récurrences

On note dans toute cette partie $\mathcal{P}_n$ une proposition dépendant d'un entier n ($n \in \mathbb{N}$ ou $n \in \mathbb{N}^*$ généralement).

Théorème de récurrence. *Si*

- Initialisation : $\mathcal{P}_0$ *est vraie*
- Hérédité : *Pour tout* $n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$

Alors

- Conclusion : *Pour tout* $n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}_n$ *est vraie.*

Remarque. On peut initialiser la récurrence à 1, ou à tout entier n_0.

Théorème de récurrence double. *Si*

- Initialisation : $\mathcal{P}_0$ *et* $\mathcal{P}_1$ *sont vraies*
- Hérédité : *Pour tout* $n \in \mathbb{N} \quad (\mathcal{P}_n \text{ et } \mathcal{P}_{n+1}) \Rightarrow \mathcal{P}_{n+2}$

Alors

- Conclusion : *Pour tout* $n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}_n$ *est vraie.*

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Calculer les premiers termes de cette suite, deviner une expression générale de u_n, puis démontrer votre conjecture.

Remarque. On peut aussi raisonner par récurrence triple, quadruple, etc.

Théorème de récurrence forte. *Si*

- Initialisation : $\mathcal{P}_0$ *est vraie*
- Hérédité : *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ $\quad (\mathcal{P}_0$ *et* $\mathcal{P}_1$ *et ... et* $\mathcal{P}_n) \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$

Alors

- Conclusion : *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ $\quad \mathcal{P}_n$ *est vraie.*

Exemple. Tout entier naturel $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.

Pour démontrer ceci on note, pour tout $n \geqslant 2$, $\mathcal{P}_n$ la propriété : «n se décompose en produit de facteurs premiers».

On démontre par récurrence forte que cette proposition est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

<u>Initialisation.</u> Si $n = 2$ alors n est un produit de nombres premiers, puisqu'il est premier. La propriété $\mathcal{P}_2$ est donc vraie.

<u>Hérédité.</u> Soit n un entier naturel strictement supérieur à 2 fixé. Supposons que les propriétés $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \ldots, \mathcal{P}_{n-1}$ sont vraies, c'est-à-dire que la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k = 2, \ldots, n-1$.

Si n est premier alors il est produit de facteurs premiers, à savoir lui-même. Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Si n n'est pas premier alors il existe deux entiers a et b strictement supérieurs à 1 tels que $n = ab$. Ces deux entiers sont compris entre 2 et $n-1$. Par hypothèse de récurrence les propriétés $\mathcal{P}_a$ et $\mathcal{P}_b$ sont vraies, donc a et b se décomposent en produits de facteurs premiers. Or $n = ab$ donc n se décompose en produit de facteurs premiers.

La propriété $\mathcal{P}_n$ est donc vraie si toutes les propriétés $\mathcal{P}_k$ pour k allant de 2 à $n-1$ sont vraies.

<u>Conclusion.</u> Par récurrence forte, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

Théorème de récurrence finie. *Soit N un entier naturel. Si*

- Initialisation : $\mathcal{P}_0$ *est vraie*
- Hérédité : *Pour tout* $n \in \{0, \ldots, N-1\}$ $\quad \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$

Alors

- Conclusion : *Pour tout* $n \in \{0, \ldots, N\}$ $\quad \mathcal{P}_n$ *est vraie.*

Exercice. Soit $m \in \mathbb{N}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^m$

Démontrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, m\}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(k)}(x) = \frac{m!}{(m-k)!} x^{m-k}$$

Expliquer pourquoi l'implication $\mathcal{P}_m \Longrightarrow \mathcal{P}_{m+1}$ est fausse.

C. Analyse - synthèse

Méthode. On souhaite déterminer tous les éléments d'un ensemble qui vérifient une certaine propriété, par exemple résoudre une équation.

Lors de la phase d'analyse on suppose qu'il existe une solution et on l'étudie. On obtient un certain nombre de propriétés.

Lors de la phase de synthèse on cherche à résoudre le problème parmi les éléments ayant les propriétés dégagées dans la partie précédente.

Exemple. Résoudre l'équation : $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$

Analyse : si un réel x est solution alors $x(x-3) = 3x-5$, donc $x^2 - 6x + 5 = 0$, puis $x = 1$ ou $x = 5$.

Synthèse : Seul $x = 5$ convient.

Conclusion : L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{5\}$.

Exemple. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Analyse : Supposons que f est une fonction vérifiant la propriété.
En fixant y on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

On dérive par rapport à x :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x+y) = f'(x)$$

Cette propriété est vraie pour tout $y \in \mathbb{R}$, et comme elle est vraie pour tout x alors elle est vraie en particulier pour $x = 0$. Ceci donne :

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad f'(y) = f'(0)$$

Ainsi f' est constante. Posons $a = f'(0)$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = a$$

Ceci montre qu'il existe une constante $b \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = ax + b$$

Synthèse : Soit $f(x) = ax + b$ où a et b sont deux réels. Alors la propriété

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

implique $b = 0$.

Conclusion : Les fonctions vérifiant la propriété ci-dessus sont les fonctions $f : x \mapsto ax$ où a est un réel.