Feuille de T. D. B3
Logique

Exercices de cours

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Que dire des propositions suivantes ?

a. $\exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant A$

b. $\forall A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant A$

c. $\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant A$

d. $\exists A \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant A$

(2) Énoncer en termes logiques les propositions suivantes pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. f est la fonction nulle.

b. f n'est pas la fonction nulle.

c. f s'annule.

d. f ne s'annule pas.

e. f est croissante.

f. f n'est pas croissante.

g. f est 2π-périodique.

h. f est périodique.

i. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Travaux dirigés

1 Donner la négation des propositions suivantes.

a. $x \leqslant 3$

b. $0 \leq x \leq 2$.

c. Robert joue à la pétanque tous les dimanches.

d. S'il pleut je prend un parapluie.

e. Les étudiants qui ont de bonnes moyennes sont contents et leurs parents aussi.

2 Démontrer à l'aide d'une table de vérité que pour toutes propositions P et Q :

$$((P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (P \text{ et } Q)) \ = \ (P \Leftrightarrow Q)$$

3 Démontrer à l'aide d'une table de vérité que pour toutes propositions P et Q :

$$(P \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)) = Q$$

Démontrer aussi ce résultat sans table de vérité.

4 Soit i et j deux entiers naturels. Démontrer que si $i + j > 7$ alors $i > 3$ ou $j > 4$.

5 Soit x un réel. Démontrer que si x^2 est irrationnel alors x est irrationnel.

6 Soit a et b deux réels. Démontrer que si

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leqslant a \Longrightarrow x \leqslant b$$

alors $a \leqslant b$.

Donner la contraposée de cette propriété.

7 Soit x un réel. Démontrer que :

$$x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ |x| \leqslant \varepsilon$$

8 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y = x^2$

b. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad y = x^2$

c. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y = x^2$

d. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad y = x^2$

e. $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad y = x^2$

f. $\exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad y = x^2$

Pourquoi manque-t-il deux possibilités ?

9 Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes ainsi que leurs négations. Précisez lesquelles sont vraies.

a. Il existe un entier naturel multiple de tous les autres entiers naturels non-nuls.

b. Un réel est positif si et seulement si il est le carré d'un réel.

c. Trois réels étant donnés, deux au moins d'entre eux ont même signe. (Remarquer que deux réels x et y ont même signe si $xy \geqslant 0$)

d. La suite $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

10 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes ainsi que leurs négations.

a. f est l'identité de $\mathbb{R}$.

b. f admet un point fixe.

c. f est monotone.

d. f est injective.

e. f est surjective.

11 Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Les phrases suivantes sont-elles équivalentes ?

a. $\exists x \in \mathbb{R} \ (f(x) = 0 \text{ et } g(x) = 0)$

et $(\exists x \in \mathbb{R} \ f(x) = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R} \ g(x) = 0)$

b. $\exists x \in \mathbb{R} \ (f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0)$

et $(\exists x \in \mathbb{R} \ f(x) = 0)$ ou $(\exists x \in \mathbb{R} \ g(x) = 0)$

c. Répondre aux mêmes questions en remplaçant les $\exists$ par des $\forall$.

12 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Démontrer que si $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante, alors f est strictement décroissante.

13 Démontrer que :

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad 1 + \sum_{k=0}^{n-1} k.k! = n!$

b. Pour tout entier $n \geqslant 4 \quad 2^n \geqslant 3(n+1)$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{3k}\right) \geqslant \sqrt[3]{n+1}$

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad$ 7 divise $3^{2n+3} + 2^n$

14 On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

a. Donner une expression simple de $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et la démontrer.

b. Même question avec $\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

15 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 9u_{n+1} - 20u_n$$

Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = a^n - b^n$$

16 Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^3}{u_n^2}$$

17 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par la donnée de u_0, u_1, u_2 et l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = 7u_{n+2} - 11u_{n+1} + 5u_n$$

a. On suppose que $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$. Déterminer le terme général de (u_n).

b. Même question avec $u_0 = 1$, $u_1 = 5$ et $u_2 = 25$.

18 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=1}^{n} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2$$

Démontrer que : $\quad \forall k \in \mathbb{N} \quad u_k = k$

19 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui vérifient :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad f(m+n) = f(m)f(n)$$

20 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) + 3f\left(\tfrac{1}{x}\right) = x^2$$

21 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient :

a. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$

b. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) + xf(1-x) = 1 + x$

c. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x - f(y)) = 2 - x - y$