

Feuille de T. D. A6

Équations différentielles

Exercices de cours

- ① Résoudre les équations suivantes :
- (E₁) $y' + \tan t y = 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
 (E₂) $t^2 y' - (t-1)y = 0$ sur \mathbb{R}_+^*
- ② On considère les équations :
- (E₁) $(1-2t-t^2)y' + 3ty = t^3 + t + 2$
 (E₂) $y' + 6y = 10 \cos 2t$
- Déterminer une solution polynomiale de (E₁) et une solution de (E₂) de la forme :
- $$y(t) = \alpha \cos 2t + \beta \sin 2t$$
- ③ Résoudre les équations suivantes :
- a. $y' + 2y = 2e^{2t}$ avec $y(0) = 1$
 b. $(1+t^2)y' - 2ty = 1+t^2$ avec $y(0) = 0$
- ④ Résoudre l'équation différentielle
- $$(H) \quad y'' - 4y' + 5y = 0$$
- sur \mathbb{C} puis sur \mathbb{R} .
- ⑤ Résoudre les équations :
- (E₁) $y'' - 5y' + 6y = 4e^{4t}$
 (E₂) $y'' - 5y' + 6y = 4e^{3t}$
 (E₃) $y'' + 2y' + 5y = 10 + \sin(2t)$
- ⑥ Résoudre l'équation (E₁) de l'exercice précédent avec les conditions initiales $y(0) = 3$ et $y'(0) = 7$.

Travaux dirigés

- ① Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue y , fonction de la variable réelle t .
- a. $y' + 3y = 3t^2/e^{3t}$
 b. $y' + y = \cos t + \sin t$ avec $y(0) = -1$
 c. $y' - (t+1)y = t^3 + 4$
 d. $3y' + 8y = \sin 2t$
 e. $(t^2 + 1)y' + ty = 3t^3$
 f. $(1 + e^{-t})y' - y = 1$ avec $y(0) = 3$
 g. $y' - \frac{3t}{t^2+1}y = \sqrt{t^2+1} - t + \frac{2t^2-1}{t^2+1}$
 h. $y' - y = \frac{1}{1+e^{2t}}$ avec $y(0) = \frac{\pi}{4}$
- Pour la dernière on pourra utiliser le changement de variable $u = e^t$.

- ② Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue y , fonction de la variable réelle t définie sur l'ensemble \mathcal{D} précisé.
- a. $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$ $ty' - y = t^2 \sin t$
 b. $\mathcal{D} =]-1, 1[$ $(1-t^2)y' + 2ty = t$ avec $y(0) = 0$
 c. $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$ $ty' - 3y = (t+1)(t-3)$
 d. $\mathcal{D} =]0, 1[$ $t y' \ln t = (\ln t + 1)y$
 e. $\mathcal{D} =]0, 2[$ $t(t-2)y' - 2y = (t-1)(t-3)$ avec $y(1) = 4$
 f. $\mathcal{D} =]0, \frac{\pi}{2}[$
 $\cos t \sin t y' + (\sin^2 t - \cos^2 t)y = \cos^3 t$ avec $y(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$
 g. $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$ $2t(\sqrt{t}+1)y' - (2\sqrt{t}+1)y = 0$
- ③ Résoudre les équations différentielles suivantes sur le plus grand intervalle possible contenant 0, avec la condition initiale $y(0) = 1$.
- a. $\cos(t)y' + \sin(t)y = 1$
 b. $\cos(t)y' - \sin(t)y = 1$
 c. $\operatorname{ch}(t)y' - \operatorname{sh}(t)y = \operatorname{th} t$
 d. $(t+1)^2 y' - (t^2-1)y = t^2 - t - 1$

- ④ Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation
- $$y + \ln(ty' + 1) = t$$

avec $y(1) = 1$, en posant $z = e^y$.

- ⑤ Soit $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Démontrer qu'il existe une unique fonction dérivable f de I dans \mathbb{R} telle que :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall t \in I \quad f'(t) = \frac{f(t)}{\cos t}$$

La calculer grâce au changement de variable $u = \sin x$.

- ⑥ Déterminer l'ensemble de toutes les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dérivables telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

On posera $\alpha = f'(0)$, et on démontrera que de telles fonctions vérifient une certaine équation différentielle.

7 Déterminer l'ensemble de toutes les fonctions de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} dérivables telles que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad f(xy) = f(x) + f(y)$$

8 Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue y , fonction de la variable réelle t .

- $y'' - 8y' + 25y = 40e^{3t}$
- $y'' - 3y' - 4y = 6e^t + 10e^{4t}$
- $\frac{1}{2}y'' - y' + y = t^2$
- $4y'' - y = 3 \operatorname{ch} t$ avec $y(0) = y'(0) = 1$
- $y'' - 2y' + y = 1$ avec $y(0) = y'(0) = 0$
- $y'' + 4y' + 4y = 4 \operatorname{ch} 2t$ avec $y(0) = y'(0) = 0$
- $y'' - 5y' + 6y = e^{3t}$
avec $y(0) = -1$ et $y'(0) = -3$

9 Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue y , fonction réelle de la variable réelle t .

- $y'' + 4y' + 5y = e^{-2t}$
avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$
- $y'' + y = 2 \operatorname{sh} t$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$
- $y'' + 4y = 4 \cos(2t)$ avec $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$
- $y'' - 7y' + 10y = 13 \sin t$
- $y'' + 2y = 2$ avec $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$
- $\frac{1}{4}y'' - y' + y = \cos 2t$ avec $y(0) = y'(0) = 0$
- $y'' + y = 2 \sin^2 t$
- $\frac{1}{2}y'' + y' + 5y = \cos 3t - 6 \sin 3t$
avec $y(0) = 4$ et $y'(0) = -2$
- $y'' - 6y' + 8y = 16t^2$
- $y'' - 2y' - 3y = e^{-t} \cos t$

10 Déterminer l'ensemble de toutes les fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (1 + x^2)f(x) - \int_0^x tf(t) dt = 1$$

11 Déterminer l'ensemble des fonctions réelles f deux fois dérivables sur \mathbb{R} telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(-x)$$

12 Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 3y(t) \end{cases}$$

d'inconnues x et y , fonctions de t , vérifiant les conditions initiales $x(0) = 3$ et $y(0) = 0$.

13 Résoudre l'équation différentielle :

$$y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$$

munie des conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ et $y''(0) = 8$.

14 Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle :

$$t^3 y'' - 2ty = 6$$

munie des conditions initiales $y(1) = y'(1) = -1$.

On posera $z(x) = y(e^x)$.