Feuille de T. D. A6
Équations différentielles

Exercices de cours

① Résoudre les équations suivantes :

$(E_1)\quad y' + \tan t\, y = 0 \quad$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$(E_2)\quad t^2y' - (t-1)y = 0 \quad$ sur $\mathbb{R}_+^*$

② On considère les équations :

$(E_1)\quad (1-2t-t^2)y' + 3ty = t^3 + t + 2$

$(E_2)\quad y' + 6y = 10\cos 2t$

Déterminer une solution polynomiale de (E_1) et une solution de (E_2) de la forme :

$$y(t) = \alpha\cos 2t + \beta \sin 2t$$

③ Résoudre les équations suivantes :

a. $y' + 2y = 2e^{2t}$ avec $y(0) = 1$

b. $(1+t^2)y' - 2ty = 1 + t^2$ avec $y(0) = 0$

④ Résoudre l'équation différentielle

$$(H)\quad y'' - 4y' + 5y = 0$$

sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.

⑤ Résoudre les équations :

$(E_1)\quad y'' - 5y' + 6y = 4e^{4t}$

$(E_2)\quad y'' - 5y' + 6y = 4e^{3t}$

$(E_3)\quad y'' + 2y' + 5y = 10 + \sin(2t)$

⑥ Résoudre l'équation (E_1) de l'exercice précédent avec les conditions initiales $y(0) = 3$ et $y'(0) = 7$.

Travaux dirigés

$\boxed{1}$ Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue y, fonction de la variable réelle t.

a. $y' + 3y = 3t^2/e^{3t}$

b. $y' + y = \cos t + \sin t$ avec $y(0) = -1$

c. $y' - (t+1)y = t^3 + 4$

d. $3y' + 8y = \sin 2t$

e. $(t^2+1)y' + ty = 3t^3$

f. $(1+e^{-t})y' - y = 1$ avec $y(0) = 3$

g. $y' - \frac{3t}{t^2+1}y = \sqrt{t^2+1} - t + \frac{2t^2-1}{t^2+1}$

h. $y' - y = \frac{1}{1+e^{2t}}$ avec $y(0) = \frac{\pi}{4}$

Pour la dernière on pourra utiliser le changement de variable $u = e^t$.

$\boxed{2}$ Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue y, fonction de la variable réelle t définie sur l'ensemble $\mathcal{D}$ précisé.

a. $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*\quad ty' - y = t^2\sin t$

b. $\mathcal{D} =]-1,1[\quad (1-t^2)y' + 2ty = t$ avec $y(0) = 0$

c. $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*\quad ty' - 3y = (t+1)(t-3)$

d. $\mathcal{D} =]0,1[\quad t\,y'\ln t = (\ln t + 1)y$

e. $\mathcal{D} =]0,2[\quad t(t-2)y' - 2y = (t-1)(t-3)$ avec $y(1) = 4$

f. $\mathcal{D} = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$\cos t \sin t\, y' + (\sin^2 t - \cos^2 t)y = \cos^3 t$ avec $y(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$

g. $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*\quad 2t(\sqrt{t}+1)y' - (2\sqrt{t}+1)y = 0$

$\boxed{3}$ Résoudre les équations différentielles suivantes sur le plus grand intervalle possible contenant 0, avec la condition initiale $y(0) = 1$.

a. $\cos(t)y' + \sin(t)y = 1$

b. $\cos(t)y' - \sin(t)y = 1$

c. $\operatorname{ch}(t)y' - \operatorname{sh}(t)y = \operatorname{th} t$

d. $(t+1)^2y' - (t^2-1)y = t^2 - t - 1$

$\boxed{4}$ Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation

$$y + \ln(ty' + 1) = t$$

avec $y(1) = 1$, en posant $z = e^y$.

$\boxed{5}$ Soit $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Démontrer qu'il existe une unique fonction dérivable f de I dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall t \in I \quad f'(t) = \frac{f(t)}{\cos t}$$

La calculer grâce au changement de variable $u = \sin x$.

$\boxed{6}$ Déterminer l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

On posera $\alpha = f'(0)$, et on démontrera que de telles fonctions vérifient une certaine équation différentielle.

$\boxed{7}$ Déterminer l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad f(xy) = f(x) + f(y)$$

$\boxed{8}$ Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue y, fonction de la variable réelle t.

a. $y'' - 8y' + 25y = 40e^{3t}$

b. $y'' - 3y' - 4y = 6e^t + 10e^{4t}$

c. $\frac{1}{2}y'' - y' + y = t^2$

d. $4y'' - y = 3\operatorname{ch} t$ avec $y(0) = y'(0) = 1$

e. $y'' - 2y' + y = 1$ avec $y(0) = y'(0) = 0$

f. $y'' + 4y' + 4y = 4\operatorname{ch} 2t$ avec $y(0) = y'(0) = 0$

g. $y'' - 5y' + 6y = e^{3t}$ avec $y(0) = -1$ et $y'(0) = -3$

$\boxed{9}$ Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue y, fonction réelle de la variable réelle t.

a. $y'' + 4y' + 5y = e^{-2t}$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$

b. $y'' + y = 2\operatorname{sh} t$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$

c. $y'' + 4y = 4\cos(2t)$ avec $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$

d. $y'' - 7y' + 10y = 13\sin t$

e. $y'' + 2y = 2$ avec $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$

f. $\frac{1}{4}y'' - y' + y = \cos 2t$ avec $y(0) = y'(0) = 0$

g. $y'' + y = 2\sin^2 t$

h. $\frac{1}{2}y'' + y' + 5y = \cos 3t - 6\sin 3t$ avec $y(0) = 4$ et $y'(0) = -2$

i. $y'' - 6y' + 8y = 16t^2$

j. $y'' - 2y' - 3y = e^{-t}\cos t$

$\boxed{10}$ Déterminer l'ensemble de toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (1+x^2)f(x) - \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

$\boxed{11}$ Déterminer l'ensemble des fonctions réelles f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(-x)$$

$\boxed{12}$ Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 2y(t) + \frac{1}{2}e^t - \frac{5}{2}e^{-t} \\ y'(t) = 2x(t) - 3y(t) + e^t - 2e^{-t} \end{cases}$$

d'inconnues x et y, fonctions de t, vérifiant les conditions initiales $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$.

$\boxed{13}$ Résoudre l'équation différentielle :

$$y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$$

munie des conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ et $y''(0) = 8$.

$\boxed{14}$ Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$t^3y'' - 2ty = 6$$

munie des conditions initiales $y(1) = y'(1) = -1$.

On posera $z(x) = y(e^x)$.