Corrigé du Devoir à la Maison n°4

1. (a) Soit x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$.
   Alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, et comme $g \circ f$ est bijective alors elle est injective donc $x = x'$.
   Ceci montre que :
   $$\forall (x, x') \in E^2 \qquad f(x) = f(x') \quad \Longrightarrow \quad x = x'$$
   donc la fonction f est injective.

   (b) Soit x un élément de E. Comme $g \circ f : E \to E$ est bijective alors il existe $x' \in E$ tel que $x = g \circ f(x')$, donc $x = g(y)$ en posant $y = f(x')$.
   Ainsi tout élément de E possède un antécédent par g, donc g est surjective.

   (c) Si f est bijective alors elle admet une fonction réciproque f^{-1}. Or par associativité de la composition des fonctions :
   $$(g \circ f) \circ f^{-1} = g \circ \left(f \circ f^{-1}\right)$$
   On note $h = g \circ f$, et on sait que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$, donc :
   $$h \circ f^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_F = g.$$
   Comme $h : E \to E$ est bijective alors h^{-1} est définie et $h^{-1} \circ h = \mathrm{Id}_E$, donc en composant par h^{-1} à gauche on obtient :
   $$f^{-1} = h^{-1} \circ g.$$
   Ceci est une expression de f^{-1} en fonction de g et h.

2. (a) Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$, et :
   $$\forall x \in [0, \pi[\qquad -1 < \cos x \leqslant 1$$
   Ceci montre que $1 + \cos x > 0$ sur $[0, \pi[$, et donc f est bien définie sur cet intervalle.

   Montrons que g est bien définie également.
   La fonction $x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ car $1 + x^2$ est strictement positif pour tout réel x.
   Par équivalences successives :
   $$\begin{aligned} -1 \leqslant \frac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant 1 \qquad & \Longleftrightarrow \qquad -1 - x^2 \leqslant 1 - x^2 \leqslant 1 + x^2 \\ & \Longleftrightarrow \qquad 0 \leqslant 2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant x^2 \end{aligned}$$

Ceci montre que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant 1$

Comme la fonction arc-cosinus est définie sur l'intervalle $[-1,1]$ alors g est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Montrons qu'elle prend bien ses valeurs dans l'intervalle $[0,\pi[$. Par équivalences :

$$-1 < \frac{1-x^2}{1+x^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1-x^2 < 1-x^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 < 2$$

Comme la dernière inégalité est une tautologie alors la première est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad -1 < \frac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant 1$$

La fonction arc-cosinus est strictement décroissante donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 0 \leqslant \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} < \pi$$

Ceci montre que la fonction g prend ses valeurs dans l'intervalle $[0,\pi[$, et donc g est bien définie.

(b) La fonction f est dérivable car elle est quotient de fonctions dérivables. Sa dérivée est :

$$\forall x \in [0,\pi[\qquad f'(x) = \frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$$

Cette dérivée est strictement positive sur $[0,\pi[$ qui est un intervalle, donc f est strictement croissante sur $[0,\pi[$.

Ceci montre que :

$$\begin{array}{llcl} \forall (x,x') \in [0,\pi[^2 & x < x' & \Longrightarrow & f(x) < f(x') \\ & \text{et} \quad x > x' & \Longrightarrow & f(x) > f(x') \end{array}$$

Ceci donne :

$$\forall (x,x') \in [0,\pi[^2 \qquad x \neq x' \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq f(x')$$

Par contraposée :

$$\forall (x,x') \in [0,\pi[^2 \qquad f(x) = f(x') \quad \Longrightarrow \quad x = x'$$

Ceci signifie exactement que f est injective.

La fonction sinus est positive sur $[0,\pi[$, et nous savons que $1+\cos x$ l'est aussi. Donc la fonction f est positive.

Ainsi -1 (par exemple) est un élément de $\mathbb{R}$ qui n'admet pas d'antécédent par f.

Donc f n'est pas surjective.

(c) Soit y un élément de $[0,\pi[$. Démontrons que y possède un antécédent par g, en considérant l'équivalence suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = y$$

On sait que la fonction arccos est la réciproque de la bijection $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$. Or $\frac{1-x^2}{1+x^2} \in [-1,1]$ d'après la question (2a) et $y \in [0,\pi]$ donc :

$$\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1-x^2}{1+x^2} = \cos y$$

Encore par équivalences :

$$\begin{aligned} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \cos y \quad & \Longleftrightarrow \quad 1 - x^2 = \cos y + x^2 \cos y \\ & \Longleftrightarrow \quad (1+\cos y)x^2 = 1 - \cos y \\ & \Longleftrightarrow \quad x^2 = \frac{1-\cos y}{1+\cos y} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}} \end{aligned}$$

Comme $y \in [0,\pi[$ alors $\cos y \in]-1,1]$ donc $\frac{1+\cos y}{1-\cos y}$ est défini et positif, et il admet une racine carrée.

Nous avons démontré que tout réel $y \in [0,\pi[$ admet $x = \sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}}$ pour antécédent. Ceci montre que g est surjective.

On remarque que $g(1) = g(-1)$ alors que $-1 \neq 1$. Ainsi g n'est pas injective.

(d) La fonction f est définie sur $[0,\pi[$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g(x) \in [0,\pi[$, donc $f \circ g$ est définie.

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in [0,\pi[$ on a $f(x) \in \mathbb{R}$, donc $g \circ f$ est bien définie.

Pour le calcul de $f \circ g$ on utilise les deux formules :

$$\forall x \in [-1,1] \quad \sin \arccos x = \sqrt{1-x^2} \quad \text{et} \quad \cos \arccos x = x$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f \circ g(x) = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}{1 + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)} = \frac{\sqrt{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}}{(1+x^2) + (1-x^2)} = \frac{\sqrt{4x^2}}{2} = |x|$$

Pour le calcul de $g \circ f$ on commence par calculer :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0,\pi[\qquad \frac{1-f^2(x)}{1+f^2(x)} &= \frac{1 - \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2}{1 + \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2} = \frac{(1+\cos x)^2 - \sin^2 x}{(1+\cos x)^2 + \sin^2 x} \\ &= \frac{1 + 2\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x}{1 + 2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{2\cos x + 2\cos^2 x}{2 + 2\cos x} = \cos x \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall x \in [0, \pi[\qquad g \circ f(x) = \arccos \frac{1 - f^2(x)}{+f^2(x)} = \arccos \cos x$$

Comme $x \in [0, \pi[\subseteq [0, \pi]$ alors $\arccos \cos x = x$, donc :

$$\forall x \in [0, \pi[\qquad g \circ f(x) = x$$

Ceci montre que $g \circ f = \mathrm{Id}_{[0,\pi[}$.

3. (a) La fonction $x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$ est dérivable par quotient. Comme elle est définie sur $\mathbb{R}$ alors elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et par restriction elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
De plus, comme $1 + x^2$ est strictement positif alors par équivalences :

$$\begin{aligned} -1 < \frac{1-x^2}{1+x^2} < 1 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad -1 - x^2 < 1 - x^2 < 1 + x^2 \\ &\Longleftrightarrow \qquad 0 < 2 \quad \text{et} \quad 0 < x^2 \end{aligned}$$

La dernière assertion étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad -1 < \frac{1-x^2}{1+x^2} < 1$$

La fonction arccos est dérivable sur $]-1, 1[$, donc par composition g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Sa dérivée est :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^* \qquad g'(x) &= \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} \times \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \\ &= \frac{4x}{1+x^2} \times \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}} \\ &= \frac{4x}{(1+x^2)\sqrt{4x^2}} = 2\frac{x}{|x|}\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

(b) Si $x \in \mathbb{R}_+^*$ alors $|x| = x$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad g'(x) = 2\frac{1}{1+x^2} = 2\arctan' x$$

Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle alors par théorème :

$$\exists K \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad g(x) = 2\arctan x + K \tag{$\star$}$$

En particulier pour $x = 1$, comme $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ et $\arctan 1 + \frac{\pi}{4}$:

$$g(1) = 2\arctan 1 + K \qquad \text{donc} \qquad \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + K$$

On en déduit que $K = 0$.
Pour $x = 0$ on a $g(0) = \arccos(1) = 0 = 2\arctan 0$ donc l'égalité $(\star)$ est vraie aussi.
Finalement on a démontré que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad g(x) = 2\arctan x}$$

(c) On représente la courbe de g à partir de celle de l'arc-tangente sur $\mathbb{R}_+$.

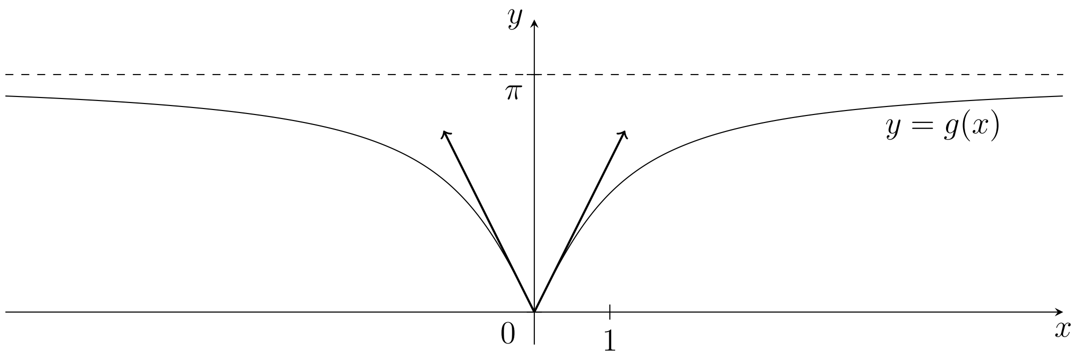
Comme la fonction arc-tangente, sur $\mathbb{R}_+$, va de 0 à $\frac{\pi}{2}$ alors la fonction $2\arctan$ va de 0 à π.

Comme la dérivée de l'arc-tangente en 0 est égale à 1 alors celle de g à droite est égale à 2.

Enfin la fonction g est paire. En effet elle est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0 et on a bien $g(-x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On peut donc obtenir la courbe de g sur $\mathbb{R}_-$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

On obtient une courbe comme la suivante :



4. (a) Soit $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. On calcule d'abord :

$$\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \cos 2\theta$$

Ceci donne :

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad g(\tan\theta) = \arccos\left(\cos 2\theta\right)$$

Comme $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors $2\theta \in [0, \pi[$ donc :

$$\boxed{\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad g(\tan\theta) = 2\theta}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$, puis $\theta = \arctan x$. Alors $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc la formule de la question précédente peut être appliquée.

De plus $\tan\theta = \tan\arctan x = x$ car $\tan\circ\arctan$ est l'identité de $\mathbb{R}$.

On obtient donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad g(x) = 2\arctan x}$$

On a retrouvé le résultat de la question 3.

(c) Si $x \in \mathbb{R}_-$ alors $-x$ appartient à $\mathbb{R}_+$ et donc la formule précédente est valable pour $-x$. Ceci donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}_- \qquad g(-x) = 2\arctan(-x).$$

On sait que la fonction g est paire : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(-x) = g(x)$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \begin{cases} 2\arctan x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 2\arctan(-x) & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Ceci se résume en utilisant la valeur absolue :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = 2\arctan|x|}$$