Corrigé du Devoir à la Maison n°4

Partie A.

1. Tout élément x de $[1,+\infty[$ vérifie $x \geqslant 1$, donc $x-1 \geqslant 0$, et ainsi $x-1$ admet une racine carrée. La fonction f est donc bien définie sur $[1,+\infty[$.

   Il est clair que $g(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $g(x) \in [1,+\infty[$. Par équivalences :

   $$g(x) \geqslant 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2+6x+9 \geqslant 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x+3)^2 \geqslant 0$$

   Cette dernière inéquation étant vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$, par équivalence on obtient :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) \in [1,+\infty[.$$

   Ainsi g est bien définie.

2. On démontre que f est injective non surjective, et g est surjective non injective.

   Pour tous éléments x et x' de $[1,+\infty[$ on a les implications suivantes :

   $$\begin{aligned} f(x)=f(x') \quad &\Longrightarrow \quad \sqrt{x-1}-3=\sqrt{x'-1}-3 \\ &\Longrightarrow \quad \sqrt{x-1}=\sqrt{x'-1} \\ &\Longrightarrow \quad \left(\sqrt{x-1}\right)^2=\left(\sqrt{x'-1}\right)^2 \\ &\Longrightarrow \quad x-1=x'-1 \\ &\Longrightarrow \quad x=x' \end{aligned}$$

   On a démontré que :

   $$\forall (x,x') \in [1,+\infty[^2 \qquad f(x)=f(x') \quad \Longrightarrow \quad x=x'$$

   Ceci signifie que la fonction f est injective.

   De plus, pour tout $x \in [1,+\infty[$ la racine carrée de $x-1$ est positive, donc :

   $$\forall x \in [1,+\infty[\qquad f(x) \geqslant -3$$

   Ceci montre que le réel -4 (par exemple) n'a pas d'antécédent par f, et donc f n'est pas surjective.

   Soit y un élément de $[1,+\infty[$. Démontrons que y possède un antécédent par g, grâce à l'équivalence suivante :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x)=y \quad \Longleftrightarrow \quad x^2+6x+10-y=0$$

   Le discriminant de cette équation de second degré est : $\Delta = 4y-4 = 4(y-1)$.

   Comme $y \in [1,+\infty[$ alors ce discriminant est positif, donc l'équation $g(x)=y$ admet au moins une solution.

   Ainsi tout élément de $[1,+\infty[$ possède un antécédent par g, donc g est surjective.

   On remarque que $g(0)=10$ et $g(6)=10$, donc les réels 0 et 6 vérifient $g(0)=g(6)$ alors qu'ils sont différents. Ceci montre que g n'est pas injective.

3. L'ensemble d'arrivée de f est inclus dans l'ensemble de départ de g, donc $g \circ f$ est définie.

   L'ensemble d'arrivée de g est inclus dans l'ensemble de départ de f, donc $f \circ g$ est définie.

   On calcule :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [1,+\infty[\qquad g \circ f(x) &= \left(\sqrt{x-1}-3\right)^2 + 6(\sqrt{x-1}-3)+10 \\
&= x-1-6\sqrt{x-1}+9+6\sqrt{x-1}-18+10 \\
&= x \\
\text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f \circ g(x) &= \sqrt{x^2+6x+9}-3 = \sqrt{(x+3)^2}-3 \\
&= |x+3|-3
\end{aligned}$$

   Ceci montre que $g \circ f = \mathrm{Id}_{[1,+\infty[}$ mais il est faux que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, par exemple car $f \circ g(-4) = -2$. Donc g n'est pas la réciproque de f.

   De toutes façons ni f ni g n'est bijective, puisque l'une n'est pas injective et l'autre n'est pas surjective, donc elles n'admettent pas de fonction réciproque.

Partie B.

1. Soit x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$.

   Alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, donc $h(x) = h(x')$. Comme h est bijective alors h est injective, donc $x = x'$. Ceci montre que :

$$\forall (x,x') \in E^2 \qquad f(x) = f(x') \quad \Longrightarrow \quad x = x'$$

   La fonction f est injective.

   Soit x un élément de E. Comme h est bijective de E dans E alors il existe $x' \in E$ tel que $x = h(x')$, ce qui donne $x = g \circ f(x')$. Donc $x = g(y)$ en posant $y = f(x')$.

   Ainsi tout élément de E possède un antécédent par g, donc g est surjective.

2. Si f est bijective alors elle admet une fonction réciproque f^{-1}, et cette fonction réciproque est également bijective.

   Comme $h = g \circ f$ alors $h \circ f^{-1} = (g \circ f) \circ f^{-1}$, et par associativité de la composition des fonctions :

$$h \circ f^{-1} = (g \circ f) \circ f^{-1} = g \circ \left(f \circ f^{-1}\right) = g \circ \mathrm{Id}_F = g$$

   Les fonctions h et f^{-1} sont bijectives, la composée de deux bijections est bijective donc g est bijective.

   De plus par propriété sa réciproque est :

$$g^{-1} = \left(h \circ f^{-1}\right)^{-1} = \left(f^{-1}\right)^{-1} \circ h^{-1} = f \circ h^{-1}$$

   Ainsi g est bijective et sa réciproque est $g^{-1} = f \circ h^{-1}$.

Partie C. Étude d'une fonction

1. Comme x^2+1 est positif pour tout réel x alors $\sqrt{x^2+1}$ est défini pour tout réel x.
   La fonction arc-tangente est définie sur $\mathbb{R}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant x \qquad \text{donc} \qquad \sqrt{x^2+1} - x > 0.$$
   La fonction arctan est strictement croissante donc :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \arctan\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) > \arctan 0 = 0.$$
   On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\arctan x \leqslant \frac{\pi}{2}$, donc :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \arctan\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) < \frac{\pi}{2}$$
   Ceci montre que :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 0 < f(x) < \pi.$$
   L'image de f est donc incluse dans l'intervalle $]0, \pi[$.
2. (a) Par définition $g(x) = f(\operatorname{sh} x)$, donc :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = 2\arctan\left(\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x} - \operatorname{sh} x\right)$$
   La formule de base de trigonométrie hyperbolique est : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$. Elle montre que $\sqrt{1+\operatorname{sh}^2} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x} = |\operatorname{ch} x|$. La fonction cosinus hyperbolique est strictement positive, donc $|\operatorname{ch} x| = \operatorname{ch} x$ et :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = 2\arctan(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)$$
   Finalement :
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = 2\arctan e^{-x}}$$
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0, \pi[$. Alors par équivalence :
   $$y = g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad 2\arctan e^{-x} = y \quad \Longleftrightarrow \quad \arctan e^{-x} = \frac{y}{2}$$
   Comme $y \in]0, \pi[$ alors $\frac{y}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction arctan est la réciproque de la fonction bijective tan : $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, donc
   $$\arctan e^{-x} = \frac{y}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-x} = \tan\frac{y}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\ln\left(\tan\frac{y}{2}\right)$$
   Tout élément y de $]0, \pi[$ admet un et un seul antécédent dans $\mathbb{R}$ par g, donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, \pi[$. De plus sa réciproque est :
   $$\begin{aligned} g^{-1} :]0, \pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -\ln\left(\tan\tfrac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

(c) D'après la question 2 de la partie B ci-dessus, comme les fonctions :

$$g = f \circ \mathrm{sh} : \mathbb{R} \to]0, \pi[\qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

sont bijectives alors $f : \mathbb{R} \to]0, \pi[$ est bijective et sa réciproque est $f^{-1} = \mathrm{sh} \circ g^{-1}$.
On calcule :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]0, \pi[\qquad f^{-1}(x) &= \mathrm{sh}\left(-\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right) \\
&= \frac{e^{-\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)} - e^{\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)}}{2} = \frac{\frac{1}{\tan\frac{x}{2}} - \tan\frac{x}{2}}{2} \\
&= \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\cos x}{\sin x} \\
&= \cot x.
\end{aligned}$$

Ainsi la réciproque de f est la fonction cotangente de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$.

3. (a) La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2 + 1 > 0$$

Par composition la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
La fonction arc-tangente est dérivable, donc par somme et composition la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule sa dérivée :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) &= 2\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1\right)\frac{1}{1 + \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)^2} \\
&= 2\left(\frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)\frac{1}{2\left(1 + x^2 - x\sqrt{x^2+1}\right)} \\
&= \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}^2\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)} = -\frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

On remarque que $f'(x) = -\arctan x$.

(b) Comme $f' = -\arctan'$ et $\mathbb{R}$ est un intervalle alors il existe une constante K telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = K - \arctan x$$

Pour $x = 0$ en particulier on obtient $f(0) = K - \arctan 0 = K$.
On calcule $f(0) = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}$, ce qui montre que $K = \frac{\pi}{2}$ puis :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x}$$

(c) L'expression obtenue dans la question précédente permet de tracer la courbe de f à partir de celle de l'arc-tangente.

On obtient ensuite celle de sa réciproque, la cotangente, par symétrie par rapport à la première bissectrice des axes.