Corrigé du Devoir Surveillé n°3

Exercices. *(12 points)*

1. *(2 points)* Tout d'abord :

$$z^9 + 3z^5 - 4z = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z(z^8 + 3z^4 - 4) = 0.$$

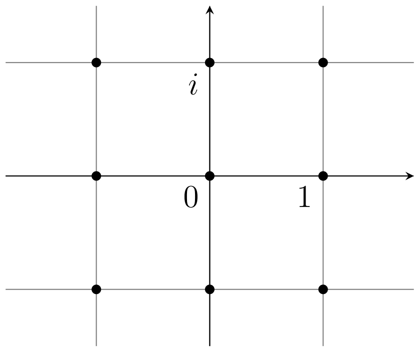
Comme $z^8 + 3z^4 - 4 = (z^4 - 1)(z^4 + 4)$ alors :

$$z^9 + 3z^5 - 4z = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = 0 \quad \text{ou} \quad z^4 = 1 \quad \text{ou} \quad z^4 = -4.$$

Les solutions de l'équation $z^4 = 1$ sont les racines quatrième de l'unité 1, i, -1, $-i$.
Pour les solutions de l'équation $z^4 = -4$ on écrit $z^4 = 4e^{i\pi} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4$, ce qui équivaut à $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\zeta$ où $\zeta \in \mathbb{U}_4$, puis $z = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)}$ où $k = 0, \ldots, 3$.
L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{0, \pm 1, \pm i, \pm 1 \pm i\}}$$

Dans le plan complexe :



2. *(2 points)* Par associativité de l'intersection puis distributivité de l'union par rapport à l'intersection :

$$\begin{aligned}(X \cup Y) \cap (\overline{X} \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y}) &= \Big[(X \cup Y) \cap (\overline{X} \cup Y)\Big] \cap (X \cup \overline{Y}) \\ &= \Big[(X \cap \overline{X}) \cup Y\Big] \cap (X \cup \overline{Y}) \\ &= [\varnothing \cup Y] \cap (X \cup \overline{Y}) \\ &= Y \cap (X \cup \overline{Y})\end{aligned}$$

Pas distributivité de l'intersection par rapport à l'union :

$$(X \cup Y) \cap (\overline{X} \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y}) = (Y \cap X) \cup (Y \cap \overline{Y}) = (Y \cap X) \cup \varnothing$$

Finalement, par commutativité de l'intersection :

$$\boxed{(X \cup Y) \cap (\overline{X} \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y}) = X \cap Y.}$$

3. (a) *(1 point)* Supposons que f est injective.
   Soit x un élément de E. Comme $f \circ g \circ f = f$ alors $f(g(f(x))) = f(x)$.
   Comme f est injective alors $g(f(x)) = x$.
   Ceci montre que $f(x)$ est antécédent de x par g.
   Tout élément de E possède un antécédent par g, donc g est surjective.

   (b) *(1 point)* Supposons que f est surjective.
   Soit y et y' deux élément de F tels que $g(y) = g(y')$.
   Comme f est surjective et y, $y' \in F$ alors il existe x, $x' \in E$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.
   Comme $g(y) = g(y')$ alors $g(f(x)) = g(f(x'))$.
   En appliquant f : $f(g(f(x))) = f(g(f(x')))$.
   Or $f \circ g \circ f = f$ donc $f(x) = f(x')$, puis $y = y'$.
   On a démontré que pour tout $(y, y') \in F^2$, si $g(y) = g(y')$ alors $y = y'$.
   Ainsi g est injective.

   (c) *(1 point)* Supposons que f est bijective. Alors f est injective et surjective, donc d'après les questions précédentes g est surjective et injective, donc g est bijective.
   De plus, comme f est bijective alors f^{-1} est définie.
   En composant l'égalité $f = f \circ g \circ f$ par f^{-1} à gauche et à droite on obtient $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, donc g est la réciproque de f : $g = f^{-1}$.

4. (a) *(1 point)* Les fonctions sh et arctan sont définies sur $\mathbb{R}$ donc par composition la fonction $x \mapsto \arctan \operatorname{sh} x$ est définie sur $\mathbb{R}$.
   La fonction ch est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{ch} x \geqslant 1$.
   Alors $\frac{1}{\operatorname{ch} x}$ est défini et $\frac{1}{\operatorname{ch} x} \in]0, 1]$. Or la fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$, donc $\arccos \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Finalement l'équation est définie sur $\mathbb{R}$.

   (b) *(1 point)* On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, donc $\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x$.
   Si $a = \operatorname{sh} x$ alors $\operatorname{ch}^2 x = 1 + a^2$, puis $\operatorname{ch} x = \pm\sqrt{1 + a^2}$.
   Comme le cosinus hyperbolique est positif alors $\operatorname{ch} x = \sqrt{1 + a^2}$.

   (c) *(3 points)* On souhaite résoudre l'équation :

$$\arcsin \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} = \arctan \operatorname{sh}(x). \qquad (\star)$$

   On raisonne par implications, en commençant par appliquer la fonction tangente aux deux termes de l'équation. Justifions que ces deux termes sont dans l'ensemble de définition de la fonction tangente.
   Si $x = 0$ alors $\arcsin \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ et $\arctan \operatorname{sh} x = \arctan 0 = 0$, donc 0 n'est pas solution.
   Si $x \in \mathbb{R}^*$ alors $\operatorname{ch} x > 1$ donc $\frac{1}{\operatorname{ch} x} \in]0, 1[$ et donc $\arcsin \frac{1}{\operatorname{ch} x} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   La fonction arc-tangente prend ses valeurs dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   Ceci montre que les deux termes de l'équation sont dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc on peut leur appliquer la fonction tangente, ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad (\star) \quad \Longrightarrow \quad \tan\left(\arcsin \frac{1}{\operatorname{ch} x}\right) = \tan\left(\arctan \operatorname{sh}(x)\right).$$

On sait que :

$$\forall X \in \mathbb{R} \qquad \tan \arctan X = X$$

$$\forall X \in [-1,1] \quad \begin{cases} \sin \arcsin X = X \\ \cos \arcsin X = \sqrt{1-X^2}. \end{cases}$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad (\star) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\frac{1}{\operatorname{ch} x}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)^2}} = \operatorname{sh} x.$$

Grâce à la formule $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ et comme la fonction ch est positive :

$$\sqrt{1-\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)^2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x}} = \left|\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right| = \frac{|\operatorname{sh} x|}{\operatorname{ch} x}.$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad (\star) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{|\operatorname{sh} x|} = \operatorname{sh} x \quad \Longrightarrow \quad |\operatorname{sh} x| \operatorname{sh} x = 1.$$

Si x est strictement négatif alors $\operatorname{sh} x$ est strictement négatif, donc x n'est pas solution.
Si x est strictement positif alors $\operatorname{sh} x$ est strictement positif, donc l'équation donne $\operatorname{sh}^2 x = 1$, puis $\operatorname{sh} x = 1$.
Résolvons cette équation :

$$\operatorname{sh} x = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (e^x)^2 - 2e^x - 1 = 0.$$

Ceci équivaut à $e^x = 1 \pm \sqrt{2}$. Comme e^x est positif, $1+\sqrt{2}$ est positif, et $1-\sqrt{2}$ est négatif alors $e^x = 1+\sqrt{2}$, puis $x = \ln(1+\sqrt{2})$.
Nous avons démontré que la seule solution possible est $x = \ln(1+\sqrt{2})$.
Vérifions qu'elle est bien solution.
Tout d'abord si $x = \ln(1+\sqrt{2})$ alors $\operatorname{sh} x = 1$, donc $\arctan \operatorname{sh} x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.
Ensuite, d'après la question précédente, comme $\operatorname{sh} x = 1$ alors $\operatorname{ch} x = \sqrt{2}$, donc $\arcsin \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.
L'équation est bien vérifiée par $x = \ln(1+\sqrt{2})$, et finalement l'ensemble de ses solutions est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\ln(1+\sqrt{2})\right\}.}$$

Problème 1. *(8 points)*

1. *(3 points)* Soit $z \in \mathbb{C}$. En appliquant la formule du binôme :

$$\begin{aligned} Q(z) = \left(ze^{i\theta}+1\right)^n - \left(ze^{-i\theta}+1\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(ze^{i\theta}\right)^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(ze^{-i\theta}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k e^{ik\theta} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k e^{-ik\theta} \end{aligned}$$

Par linéarité de la somme :

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k\left(e^{ik\theta}+e^{-ik\theta}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k} z^k \times 2i\sin(k\theta)\right].$$

Finalement :

$$Q(z) = 2i\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)z^k = 2iP(z).$$

On en déduit :

$$P(z)=0 \iff Q(z)=0 \iff \left(ze^{i\theta}+1\right)^n = \left(ze^{-i\theta}+1\right)^n.$$

En factorisant par $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$:

$$\begin{aligned} P(z)=0 &\iff \left[e^{i\theta}\left(z+e^{-i\theta}\right)\right]^n = \left[e^{-i\theta}\left(z+e^{i\theta}\right)\right]^n \\ &\iff e^{in\theta}\left(z+e^{-i\theta}\right)^n = e^{-in\theta}\left(z+e^{i\theta}\right)^n \end{aligned}$$

Comme $e^{in\theta}=e^{i\pi}=-1$ et $e^{-in\theta}=e^{-i\pi}=-1$ alors :

$$P(z)=0 \iff \left(z+e^{-i\theta}\right)^n = \left(z+e^{i\theta}\right)^n.$$

Remarquons que :

$$z+e^{i\theta}=0 \iff z=-e^{i\theta} \iff z+e^{-i\theta} = -e^{i\theta}+e^{-i\theta} = -2i\sin\theta.$$

Comme $\theta=\frac{\pi}{n}$ avec $n>1$ alors $0<\theta<\pi$, donc $\sin\theta\neq 0$.
Ceci montre que $z=-e^{i\theta}$ ne peut être solution de l'équation $P(z)=0$.
On suppose dorénavant $z\neq -e^{i\theta}$, ce qui donne $z+e^{-i\theta}\neq 0$, et ainsi :

$$P(z)=0 \iff \left(\frac{z+e^{-i\theta}}{z+e^{i\theta}}\right)^n = 1.$$

Par définition $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des racines n-èmes de l'unité, donc :

$$P(z)=0 \iff \frac{z+e^{-i\theta}}{z+e^{i\theta}} \in \mathbb{U}_n.$$

On sait que 1 est une des racines n-èmes de l'unité, mais on ne peut avoir $\frac{z+e^{-i\theta}}{z+e^{i\theta}}=1$, car cela donnerait $e^{-i\theta}=e^{i\theta}$, puis $\sin\theta=0$, nous avons vu que c'est faux.
On a donc démontré que pour tout $z\in\mathbb{C}$:

$$P(z)=0 \iff \frac{z+e^{-i\theta}}{z+e^{i\theta}} \in \mathbb{U}_n\setminus\{1\}.$$

2. *(2 points)* Par propriété :
$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{ik\frac{2\pi}{n}} \;\middle|\; k = 0, \dots, n-1 \right\}$$
Donc :
$$\mathbb{U}_n \setminus \{1\} = \left\{ e^{i2k\theta} \;\middle|\; k = 1, \dots, n-1 \right\}$$
Ainsi :
$$P(z) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{z + e^{-i\theta}}{z + e^{i\theta}} = e^{i2k\theta} \qquad k \in \{1, \dots, n-1\}.$$
Fixons un entier $k \in \{1, \dots, n-1\}$ et résolvons cette équation.
$$\begin{aligned}
\frac{z + e^{-i\theta}}{z + e^{i\theta}} = e^{i2k\theta} \quad &\Longleftrightarrow \quad z + e^{-i\theta} = ze^{i2k\theta} + e^{i(2k+1)\theta} \\
&\Longleftrightarrow \quad z\left(1 - e^{i2k\theta}\right) = e^{i(2k+1)\theta} - e^{-i\theta} \\
&\Longleftrightarrow \quad ze^{ik\theta}\left(e^{-ik\theta} - e^{ik\theta}\right) = e^{ik\theta}\left(e^{i(k+1)\theta} - e^{-i(k+1)\theta}\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad -ze^{ik\theta}2i\sin(k\theta) = e^{ik\theta}2i\sin((k+1)\theta) \\
&\Longleftrightarrow \quad z = -\frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin(k\theta)}
\end{aligned}$$
La dernière équivalence est correcte car :
- Comme $\left|e^{ik\theta}\right| = 1$ alors $e^{ik\theta} \neq 0$.
- Comme $0 < k < n$ alors $0 < k\theta < \pi$ et donc $\sin k\theta \neq 0$.

Finalement l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$ est :
$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin(k\theta)} \;\middle|\; k = 1, \dots, n-1 \right\}.}$$

3. *(2 points)* La fonction $f : x \mapsto -\frac{\sin(x+\theta)}{\sin x}$ est bien définie sur $]0, \pi[$ car la fonction sinus ne s'annule pas sur cet intervalle.
Par quotient elle est dérivable et :
$$\forall x \in \,]0, \pi[\qquad f'(x) = -\frac{\cos(x+\theta)\sin x - \sin(x+\theta)\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin\theta}{\sin^2 x}.$$
Comme $\theta = \frac{\pi}{n}$ alors f' est strictement positive, et donc f est strictement croissante.
La fonction sinus tend vers 0 par valeurs positives lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, et $\sin\theta > 0$, donc :
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty.$$
La fonction sinus tend vers 0 par valeurs positives lorsque x tend vers π par valeurs inférieures, et $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta < 0$, donc :
$$\lim_{\substack{x \to \pi \\ <}} f(x) = +\infty.$$
Par quotient la fonction f est continue, et elle est strictement monotone.
D'après le théorème de la bijection elle réalise une bijection de $]0, \pi[$ dans son image, donc dans $f(]0, \pi[) =]\lim_0 f, \lim_\pi f[= \mathbb{R}$.

4. *(1 point)* D'après la question (1) les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont les $f(k\theta)$ pour $k = 1, \dots, n-1$.
   En effet, comme $0 < k < n$ alors $0 < k\theta < \pi$, donc $f(k\theta)$ est défini et :
   $$\forall k = 1, \dots, n-1 \qquad f(k\theta) = -\frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin(k\theta)}.$$
   La fonction f est injective car bijective, et les $k\theta$ sont $n-1$ réels distincts, donc les $f(k\theta)$ sont distincts.
   Les $n-1$ solutions obtenues dans la question (1) sont donc distinctes, et ainsi l'équation $P(z) = 0$ admet exactement $n-1$ solutions distinctes.

Problème 2. *(17 points)*

1. *(2 points)* La fonction φ est définie sur $\mathcal{D}_\varphi = \mathbb{R} \setminus \{4\}$, elle est dérivable par quotient et :
   $$\forall x \in \mathcal{D}_\varphi \qquad \varphi'(x) = \frac{4}{(4-x)^2}.$$
   Cette dérivée est strictement positive donc φ est strictement croissante sur $]-\infty, 4[$ et sur $]4, +\infty[$.
   Ses limites sont :
   $$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = -1 \qquad \lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} \varphi(x) = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} \varphi(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = -1.$$
   Pour les limites en $\pm\infty$ on peut écrire $\varphi(x) = \frac{1}{\frac{4}{x} - 1}$.
2. *(2 points)* On remarque que $\varphi(0) = 0$, donc les variations de φ montrent que :
   $$\forall x \in \mathcal{D}_\varphi \qquad 0 \leqslant \varphi(x) \iff 0 \leqslant x < 4.$$
   La fonction $x \mapsto \sqrt{\varphi(x)}$ est donc définie sur $[0, 4[$.
   Comme la fonction arc-tangente est définie sur $\mathbb{R}$ alors $f : x \mapsto 2 \arctan \sqrt{\varphi(x)}$ est définie sur $[0, 4[$.
   On sait que
   $$\forall x \in [0, 4[\quad \sqrt{\varphi(x)} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \forall X \in \mathbb{R}_+ \quad \arctan X \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[.$$
   Comme $f(x) = 2 \arctan \sqrt{\varphi(x)}$ alors :
   $$\forall x \in [0, 4[\qquad f(x) \in [0, \pi[.$$
   La fonction f prend bien ses valeurs dans l'intervalle $[0, \pi[$.

3. (a) *(2 points)* Fixons $y \in [0, \pi[$ et résolvons l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in [0, 4[$.
Tout d'abord :

$$f(x) = y \iff 2\arctan\sqrt{\frac{x}{4-x}} = y \iff \arctan\sqrt{\frac{x}{4-x}} = \frac{y}{2}.$$

La fonction arc-tangente est la réciproque de la fonction bijective $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, et comme $y \in [0, \pi[$ alors $\frac{y}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc :

$$\arctan\sqrt{\frac{x}{4-x}} = \frac{y}{2} \iff \sqrt{\frac{x}{4-x}} = \tan\frac{y}{2}.$$

Comme $\frac{y}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors $\tan\frac{y}{2} \geqslant 0$, donc :

$$\sqrt{\frac{x}{4-x}} = \tan\frac{y}{2} \iff \frac{x}{4-x} = \tan^2\frac{y}{2}.$$

Ceci donne :

$$f(x) = y \iff x = 4\tan^2\frac{y}{2} - x\tan^2\frac{y}{2} \iff x\left(1 + \tan^2\frac{y}{2}\right) = 4\tan^2\frac{y}{2}$$

Comme $1 + \tan^2\frac{y}{2} \neq 0$:

$$f(x) = y \iff x = \frac{4\tan^2\frac{y}{2}}{1+\tan^2\frac{y}{2}} = \frac{4\sin^2\frac{y}{2}}{\cos^2\frac{y}{2} + \sin^2\frac{y}{2}} = 4\sin^2\frac{y}{2}.$$

La solution obtenue $x = 4\sin^2\frac{y}{2}$ appartient à l'ensemble $[0, 4[$ car $\frac{y}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $0 \leqslant \sin\frac{y}{2} < 1$.
Nous avons démontré que pour tout $y \in [0, \pi[$ l'équation $f(x) = y$ admet une et une seule solution x dans l'intervalle $[0, 4[$, donc la fonction $f : [0, 4[\to [0, \pi[$ est bijective.
De plus sa réciproque est :

$$\begin{aligned} f^{-1} : [0, \pi[&\longrightarrow [0, 4[\\ x &\longmapsto 4\sin^2\tfrac{x}{2}. \end{aligned}$$

(b) *(0,5 point)* Par formule de linéarisation :

$$\forall x \in [0, \pi[\qquad f^{-1}(x) = 4\frac{1 - \cos\left(2 \times \frac{x}{2}\right)}{2} = 2(1 - \cos x).$$

(c) *(1,5 points)* Soit $y \in [0, 4[$. On résout l'équation $2(1 - \cos x) = y$, d'inconnue $x \in [0, \pi[$. Tout d'abord :

$$2(1 - \cos x) = y \iff \cos x = 1 - \frac{y}{2}.$$

Comme $y \in [0,4[$ alors $1-\frac{y}{2} \in]-1,1]$. De plus $x \in [0,\pi[$ et la fonction arc-cosinus est la réciproque de la fonction bijective $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$, donc :

$$\cos x = 1-\frac{y}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \arccos\left(1-\frac{y}{2}\right).$$

Ainsi tout élément y de $[0,\pi[$ admet un et un seul antécédent par la fonction f^{-1} dans l'intervalle $[0,\pi[$.

Ceci montre que la fonction $f^{-1} : \begin{array}{rcl} [0,\pi[& \longrightarrow & [0,4[\\ x & \longmapsto & 2(1-\cos x) \end{array}$ est bijective, et que sa réciproque est la fonction $(f^{-1})^{-1} : \begin{array}{rcl} [0,4[& \longrightarrow & [0,\pi[\\ x & \longmapsto & \arccos\left(1-\frac{x}{2}\right). \end{array}$

Comme $(f^{-1})^{-1} = f$ alors on en déduit :

$$\forall x \in [0,4[\qquad f(x) = \arccos\left(1-\frac{x}{2}\right). \tag{1}$$

4. (a) *(1 point)* On sait que :

$$\forall X \in \mathbb{R} \qquad \cos 2X = 2\cos^2 X - 1 = \frac{2}{1+\tan^2 X} - 1 = \frac{1-\tan^2 X}{1+\tan^2 X}.$$

De plus, pour tout $X \in \mathbb{R}$: $\tan \arctan X = X$.

On en déduit :

$$\forall x \in [0,4[\quad \cos(f(x)) = \frac{1-\frac{x}{4-x}}{1+\frac{x}{4-x}} = 1-\frac{x}{2}.$$

(b) *(1 point)* On sait que :

$$\forall x \in [0,4[\qquad f(x) \in [0,\pi[\quad \text{et} \quad 1-\frac{x}{2} \in]-1,1].$$

La fonction arc-cosinus est la réciproque de la fonction bijective $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$, donc :

$$\forall x \in [0,4[\qquad \cos(f(x)) = 1-\frac{x}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = \arccos\left(1-\frac{x}{2}\right).$$

On a démontré de nouveau la formule (1).

5. (a) *(2 points)* On rappelle que pour tout $x \in [0,4[$: $f(x) = 2\arctan\sqrt{\varphi(x)}$.

La fonction φ est dérivable sur $]0,4[$ et strictement croissante, donc :

$$\forall x \in]0,4[\quad \varphi(x) > \varphi(0) = 0.$$

La fonction racine carré est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction arc-tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition la fonction f est dérivable sur $]0,4[$. De plus :

$$\forall x \in]0,4[\qquad f'(x) = 2 \times \frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x)}} \times \frac{1}{1+\left(\sqrt{\varphi(x)}\right)^2} = \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)}(1+\varphi(x))}.$$

On obtient :

$$\forall x \in]0,4[\qquad f'(x) = \frac{\frac{4}{(4-x)^2}}{\sqrt{\frac{x}{4-x}}\left(1+\frac{x}{4-x}\right)} = \frac{1}{(4-x)\sqrt{\frac{x}{4-x}}}$$

Comme $4-x>0$ sur $]0,4[$ alors :

$$\boxed{\forall x \in]0,4[\quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}.}$$

(b) *(2 points)* La fonction arc-cosinus est définie sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-1 \leqslant 1-\frac{x}{2} \leqslant 1 \iff 0 \leqslant x \leqslant 4 \qquad \text{et} \qquad -1 < 1-\frac{x}{2} < 1 \iff 0 < x < 4.$$

Ceci montre que la fonction $g : x \mapsto \arccos\left(1-\frac{x}{2}\right)$ est définie sur $[0,4]$, et dérivable sur $]0,4[$ par composition.
On calcule :

$$\forall x \in]0,4[\qquad g'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{-1}{\sqrt{1-\left(1-\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}.$$

(c) *(1 point)* On constate que $f' = g'$ sur $]0,4[$. Par théorème, comme $]0,4[$ est un intervalle alors il existe une constante K telle que :

$$\forall x \in]0,4[\qquad f(x) = g(x) + K.$$

La fonction f est continue, ainsi que la fonction g par composition de fonctions continues, donc :

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (g(x)+K) = g(0) + K.$$

On en déduit :

$$\forall x \in [0,4[\qquad f(x) = g(x) + K.$$

On calcule $f(0) = 2\arctan 0 = 0$ et $g(0) = \arccos(1) = 0$, donc $K = 0$ et finalement $f = g$ sur $[0,4[$.

6. (a) *(1 point)* On sait que :

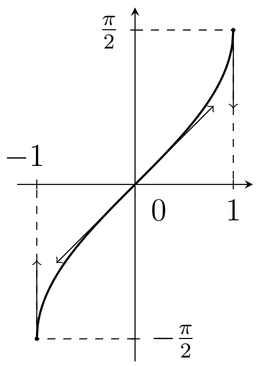
$$\forall X \in [-1,1] \qquad \arccos X + \arcsin X = \frac{\pi}{2}.$$

De plus la fonction arc-sinus est impaire, donc :

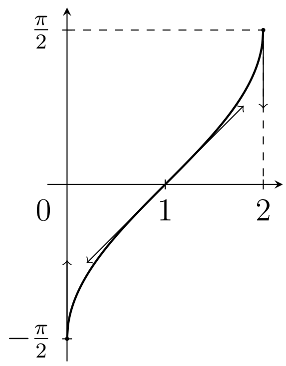
$$\begin{aligned}\forall x \in [0,4[\qquad f(x) = \arccos\left(1-\frac{x}{2}\right) &= \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(1-\frac{x}{2}\right)\\ &= \arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right) + \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(b) *(1 point)* On obtient successivement les courbes suivantes :

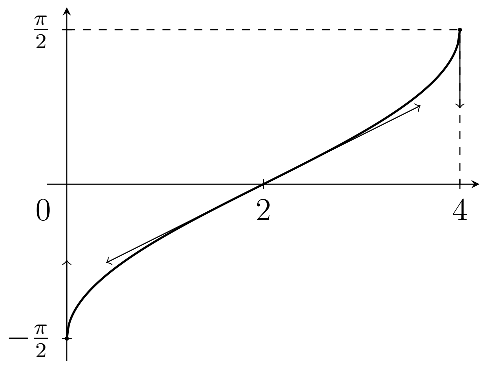
$y = \arcsin(x)$



$y = \arcsin(x-1)$



$y = \arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right)$



Puis finalement la courbe de f :