Lycée Bellevue – Toulouse **pour le 8 décembre 2025**
MPSI – Mathématiques

Devoir à la Maison n°5

On définit deux fonctions f et g par :

$$f : \begin{array}{rcl} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2\arctan\sqrt{x} - \dfrac{\pi}{2} \end{array}$$

1. (a) Étudier la fonction f :
   Justifier qu'elle est bien définie, dérivable, déterminer ses variations et sa limite.
   Tracer sa courbe représentative.
   (b) Justifier que f réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}_+$.
2. (a) Justifier que g est bien définie et que : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad g(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   (b) Démontrer que $\arctan x \underset{(0)}{\sim} x$ et en déduire que g n'est pas dérivable en 0.

On note dorénavant :

$$f : \begin{array}{rcl} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x & \longmapsto & 2\arctan\sqrt{x} - \dfrac{\pi}{2} \end{array}$$

3. (a) Simplifier $\cos(2\arctan x)$ pour tout réel x.
   En déduire une expression simple de $f \circ g$.
   (b) Démontrer que g est la réciproque de f.
   (c) Ajouter la courbe de g au graphique de la question 1(a).
4. (a) Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx$ grâce au changement de variable $x = 2t - \frac{\pi}{2}$.
   (b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$.
5. Plus généralement, soit a et b deux réels tels que $a < 0 < b$. Soit $\varphi : [a, 0] \to [0, b]$ une bijection croissante de classe $\mathscr{C}^1$. Démontrer que :

$$\int_0^b \varphi^{-1}(x)\,dx = -\int_a^0 \varphi(x)\,dx$$