Lycée Bellevue – Toulouse **pour le 2 décembre 2024**
MPSI – Mathématiques

Devoir à la Maison n°5

Partie A. Nombres de Mersenne

Soit a et b deux entiers tels que $0 < b < a$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad a - b$ divise $a^n - b^n$.
2. Démontrer que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$: $\quad$ si m divise n alors $a^m - b^m$ divise $a^n - b^n$.
3. Soit a et n deux entiers strictement supérieurs à 1.
   Démontrer que si $a^n - 1$ est premier alors $a = 2$ et n est premier.
4. Pour tout p premier on note $M_p = 2^p - 1$ et on appelle cet entier *nombre de Mersenne.*
   Donner quatre nombres de Mersenne premiers et un nombre de Mersenne non premier.

Partie B. Nombres parfaits

Un entier strictement positif m est dit *parfait* si la somme de ses diviseurs autres que lui-même est égale à m.

Le plus petit nombre parfait est 6, car ses diviseurs sont 1, 2, 3 et 6, et $1 + 2 + 3 = 6$.

1. *Question optionnelle.*
   (a) Écrire une fonction Python déterminant si un entier est parfait.
   On pourra définir une ou plusieurs fonctions annexes, par exemple pour calculer la somme des diviseurs d'un entier.
   (b) À l'aide d'un ordinateur déterminer les cinq premiers nombres parfaits.
2. (a) Démontrer que si M_p est premier, alors $2^{p-1}M_p$ est parfait.
   (b) En déduire quatre nombres parfaits.
3. Dans cette question on démontre une réciproque due à Euler : tout nombre parfait pair est de la forme $2^{p-1}M_p$ où M_p est premier.
   Soit m un nombre parfait pair.
   (a) Justifier qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{N}$ impair tels que $m = 2^k u$.
   (b) Soit $d_1, \dots, d_r$ les diviseurs de u et σ leur somme. Démontrer que $2m = \left(2^{k+1} - 1\right)\sigma$.
   (c) Démontrer qu'il existe un entier v tel que $u = (2^{k+1} - 1)v$.
   (d) Justifier que si $v > 1$ alors 1, v, u sont trois diviseurs distincts de u, puis que $\sigma \geqslant 1 + v + u$.
   En déduire une contradiction.
   (e) Conclure.

On sait donc que les nombres parfaits pairs sont les $2^{p-1}M_p$ où M_p est premier.

On ignore s'il existe des nombres parfaits impairs.

On ne sait pas non plus s'il existe une infinité de nombre de Mersenne premiers, donc de nombres parfaits.