Feuille de T. D. B4
Arithmétique

Exercices de cours

(1) Soit a et b deux entiers avec b strictement positif.

Démontrer que b divise a si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

(2) Soit a et b deux entiers avec b non-nul, et q le quotient de la division euclidienne de a par b.

Démontrer que $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$.

(3) Écrire une fonction Python implémentant l'algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD.

(4) Déterminer des coefficients de Bézout pour (a, b) valant $(6, 7)$, $(6, 8)$, $(7, 100)$ et $(49, 175)$.

(5) Soit a et b deux entiers non-nuls.

a. Déterminer $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

b. Déterminer l'ensemble de toutes les sommes possibles d'un élément de $a\mathbb{Z}$ et d'un élément de $b\mathbb{Z}$:
$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{\, m + n \mid m \in a\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad n \in b\mathbb{Z}\}$$

(6) Soit a, b, n trois entiers. En utilisant le théorème de Bézout, démontrer que :

a. Si a et b sont premiers entre eux et divisent n, alors ab divise n.

b. Si a et b sont premiers avec n alors ab est premier avec n.

(7) Déterminer tous les couples $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :

a. $24u + 15v = 20$ b. $24u + 15v = 21$.

(8) Donner la liste des nombres premiers inférieurs à 100.

(9) Décomposer 60, 375, 389, 899, 1 001, 2 016, 2 020, et 777 000 en produit de facteurs premiers.

(10) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ les facteurs premiers de $n! + 1$ sont strictement supérieurs à n.

En déduire une autre preuve de l'infinité des nombres premiers.

(11) Donner la décomposition en facteurs premiers de 792 000.

En déduire le nombre de diviseurs positifs de ce nombre.

(12) Calculer la valeur exacte du PGCD de :
$$15 \times 39^2 \times 77^3 \times 101 \times 10^4$$
$$\text{et} \quad 22^2 \times 26^3 \times 91^3 \times 102 \times 10^3.$$

(13) Le but de cet exercice est de démontrer qu'un entier naturel est différence de deux carrés si et seulement si il n'est pas congru à 2 modulo 4.

a. Quels sont les carrés modulo 4 ? En déduire le sens direct.

b. Calculer $(n+1)^2 - n^2$ et $(n+1)^2 - (n-1)^2$ et en déduire le sens indirect.

c. Écrire 27, 28 et 29 comme différence de deux carrés.

(14) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

a. $9x \equiv 7 \ [20]$ b. $4x \equiv 5 \ [13]$

c. $6x \equiv 5 \ [14]$ d. $x^2 + 5x \equiv 3 \ [11]$

(15) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} 2^k$.

a. Calculer S_n pour n allant de 2 à 13.
Pour quelles valeurs S_n est-il multiple de n ?

b. Démontrer que si p est premier impair alors p divise S_p.

(16) Démontrer que $\log 3$ et $\frac{\ln 8}{\ln 7}$ sont irrationnels.

Travaux dirigés

1 Décomposer en produit de facteurs premiers :
$$a = 10! \qquad b = 20! \qquad c = \binom{20}{7} \qquad d = \binom{50}{12}$$

2 Calculer les PGCD et PPCM des ensembles d'entiers suivants :

a. 84 et 90 d. 202, 303 et 606

b. 77 et 91 e. 90, 99 et 110

c. 364 et 495 f. 30, 42, 66 et 105

3 Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers $a = 2\,613\,600$ et $b = 4\,306\,500$. Calculer ensuite leur PGCD, et la décomposition en facteurs premier de leur PPCM.

4 Donner des coefficients de Bézout pour les n-uplets :

a. $(6, 10)$ b. $(24, 35)$ c. $(55, 143)$

d. $(101, 120)$ e. $(6, 10, 15)$ f. $(60, 70, 105)$

g. $(10n + 3, 7n + 2)$ h. $\big(9n^2 + 2, 3n + 1\big)$

5 Démontrer que si p est un nombre premier strictement supérieur à 3 alors $p^2 - 1$ est multiple de 24.

6 Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a. $n^3 - n$ est multiple de 6.

b. $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ est un multiple de 9.

7 Soit n un entier naturel, et $a_p \dots a_0$ son écriture en base 10, c'est-à-dire que les a_i sont des entiers tels que $0 \leqslant a_i \leqslant 9$ et $n = \sum_{i=0}^{p} a_i 10^i$.

Démontrer que :

a. n est multiple de 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est multiple de 9.

b. n est multiple de 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres $\sum_{i=0}^{p} (-1)^i a_i$ est multiple de 11.

8 Soit n un entier naturel, q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 10.

a. Démontrer que n est multiple de 7 si et seulement si $q - 2r$ est multiple de 7.

b. En déduire un algorithme pour déterminer mentalement si un entier est multiple de 7.

Appliquer cet algorithme aux entiers 84, 173, 343, 526, 1 001, 4 345, 5 292, 12 915, 999 999 et 1 111 111.

9 Résoudre les équations suivantes, où les inconnues sont des entiers relatifs.

a. $3m + 7n = 0$	b. $3m + 7n = 32$
c. $15m + 11n = 3$	d. $6m + 15n = 40$
e. $6m + 15n = 39$	f. $28m + 66n = 40$
g. $2m + 3n + 5p = 0$	h. $2m + 3n + 5p = 1$

10 Résoudre les équations et systèmes d'équations suivants, d'inconnues entières.

a. $7n \equiv 1\,[18]$

b. $11n \equiv 7\,[27]$

c. $\begin{cases} n \equiv 2\,[5] \\ n \equiv 3\,[8] \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3n \equiv 7\,[10] \\ 5n \equiv 1\,[9] \end{cases}$

e. $\begin{cases} n \equiv 1\,[3] \\ n \equiv 2\,[7] \\ n \equiv 3\,[8] \end{cases}$

f. $\begin{cases} 2m + 3n \equiv 1\,[17] \\ 11m + 13n \equiv 5\,[17] \end{cases}$

11 Déterminer tous les couples d'entiers naturels (m, n) tels que :

a. $m \wedge n = 5$ et $m \vee n = 60$

b. $m \wedge n = 6$ et $m + n = 72$

c. $m \vee n = 2100$ et $m + n = 159$

d. $m \vee n = (m \wedge n)^2$ et $m + n = 70$

12 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k!$.

a. Résoudre l'équation $a^2 \equiv 3\,[10]$ dans $\mathbb{N}$.

b. Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles S_n est un carré.

13 Soit a et b deux entiers tels que $0 < b < a$.

a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a - b$ divise $a^n - b^n$.

b. Démontrer que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$: si m divise n alors $a^m - b^m$ divise $a^n - b^n$.

c. Soit a et n deux entiers tels que $a \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$. Démontrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.

d. Pour tout p premier on note $M_p = 2^p - 1$.
Donner quatre nombres M_p premiers.
Ces nombres sont appelés *nombres premiers de Mersenne*.

14 Pour tout entier p premier on note $M_p = 2^p - 1$. Un entier m est dit *parfait* si la somme de ses diviseurs autres que lui-même est égale à m.

a. Démontrer que si M_p est premier, alors $2^{p-1} M_p$ est parfait.

On démontre dans la suite une réciproque, due à Euler : tout nombre parfait pair est de la forme $2^{p-1} M_p$ où p et M_p sont premiers.

Soit m un nombre parfait pair.

b. Justifier qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{N}$ impair tels que $m = 2^k u$.

c. Soit $d_1, \dots, d_r$ les diviseurs de u et σ leur somme. Démontrer que $2m = \left(2^{k+1} - 1\right)\sigma$.

d. Démontrer qu'il existe un entier v tel que $u = (2^{k+1} - 1)v$.

e. Justifier que si $v > 1$ alors $\sigma \geqslant 1 + v + u$.
En déduire une contradiction.

f. Conclure.

15 Soit a, b, n trois entiers avec n non-nul.
Démontrer que si $a \equiv b\,[n]$ alors $a^n \equiv b^n\,\left[n^2\right]$.

16 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $u_n = 2^n - 1$.

a. Soit a et b deux entiers avec $a > b > 0$, et soit r le reste de la division euclidienne de a par b.
Démontrer que u_r est le reste de la division euclidienne de u_a par u_b.

b. Déterminer $u_a \wedge u_b$.

17 Soit a et b deux entiers naturels non-nuls, q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de $a - 1$ par b.

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le quotient et le reste de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}.

18 Soit a, b, k trois entiers non-nuls.
Démontrer que :

$$ka \wedge kb = k(a \wedge b) \quad \text{et} \quad ka \vee kb = k(a \vee b)$$

19 Soit a, b, n entiers naturels, avec $n > 0$.

a. Démontrer que si a^n divise b^n alors a divise b.

b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(a \wedge b)^n = a^n \wedge b^n \quad \text{et} \quad (a \vee b)^n = a^n \vee b^n$$

20 a. Par combien de zéros se termine 1000! ?

b. Soit n un entier naturel et p un nombre premier. Démontrer que :

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_p(n) \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

21 Résoudre les équations suivantes, d'inconnues $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

a. $m^2 = n^2 + 1$	b. $m^2 = n^2 + 6$
c. $m^2 = n^2 + 7$	d. $m^2 = n^2 + 40$
e. $3^m + 1 = n^2$	f. $3^m - 1 = n^2$
g. $m^3 + m = n^2$	h. $m^3 - m = n^2$
i. $m^3 = n^3 + 218$	j. $m^3 = n^3 + 999$

22

a. Soit x un réel. Démontrer que s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que x^n est irrationnel alors x est irrationnel.

b. Soit p un nombre premier. Démontrer que $\sqrt{p}$ est irrationnel.

c. Soit n un entier naturel. Démontrer que $\sqrt{n}$ est entier ou irrationnel.

d. Démontrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ et $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ sont irrationnels.

e. Démontrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ est irrationnel.

f. Démontrer que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ est irrationnel.

23 Soit a et b deux entiers naturels strictement supérieurs à 1.

Démontrer que si a et b sont premiers entre eux alors $\frac{\ln a}{\ln b}$ est irrationnel.

24 Démontrer que l'équation $x^3 + x = 1$ admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}$, puis que cette solution est irrationnelle.