Chapitre B5
Matrices

On note n et p deux entiers naturels non-nuls, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.

I. Définitions

A. Matrices

Définition. Une matrice de taille (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau de n lignes et p colonnes :

où les coefficients a_{ij} ou $a_{i,j}$ sont éléments de $\mathbb{K}$. Ils sont indexés par i (indice de ligne) et j (indice de colonne).

Notation. L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté :

Exemples.

(i) La matrice nulle est notée 0_{np} ou $0_{n,p}$, elle ne contient que des 0.

(ii) Une matrice de taille $(1, p)$ est appelée matrice-ligne, une matrice de taille $(n, 1)$ est appelée matrice-colonne.

Remarque. Deux matrices sont égales si et seulement si elles sont de même taille et tous leurs coefficients sont égaux.

Notation. La matrice A définie ci-dessus peut être notée :

B. Opérations linéaires

Définition : multiplication par un scalaire.
Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note λA la matrice définie par :

En d'autre termes, si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ alors $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

Remarque. La multiplication par un scalaire définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \\ (\lambda, A) &\longmapsto \lambda A \end{aligned}$$

Exemple.
$1A =$ $\qquad 0A =$ $\qquad (-1)A$ est notée $-A$

Définition : addition.
Soit A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Alors on définit leur somme $A + B$ par :

En d'autre termes, si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ alors $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

Exemple.

Remarque. L'addition des matrices définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \\ (A, B) &\longmapsto A + B \end{aligned}$$

Remarque. On note de même $A - B$ pour la soustraction, qui est définie par $A - B = A + (-1)B$. On remarque que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \qquad A - A =$$

Proposition. *Pour toutes matrices A et B de taille (n, p) et tous scalaires λ et μ :*

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \qquad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A \qquad \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$$

Définition. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, et soit $A_1, \dots, A_m$ des matrices de taille (n, p) puis $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ des scalaires. Alors la matrice

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k A_k = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_m A_m$$

est appelée combinaison linéaire des matrices $A_1, \dots, A_m$.

Définition. Pour tout $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, p$ on note E_{ij} la matrice de taille (n, p) dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1.

Proposition. *Toute matrice $A = (a_{ij})$ se décompose de façon unique comme combinaison linéaire des matrices E_{ij} :* $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij} E_{ij}$

C. Multiplication

Définition.

Soit L une matrice-ligne à n coefficients, et C une matrice-colonne à n coefficients. Le produit LC est le réel :

$LC =$

Soit A une matrice de taille (m, n), B une matrice de taille (n, p). Alors le produit AB est la matrice C de taille (m, p) dont les coefficients sont

$\forall i = 1, \dots, m \qquad \forall k = 1, \dots, p$

Remarques.

(i) La multiplication matricielle définit l'application suivante :

(ii) Le coefficient (i,k) est le produit de la ligne i de A par la colonne k de B.

Exemple 1. Calculer AB et BA dans les cas suivants :

(i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *(ii)* $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 9 \end{pmatrix}$ *(iv)* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$

(v) $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *(vi)* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix}$

Remarques.

(i) **La multiplication matricielle n'est pas commutative :**
Il est faux en général que $AB = BA$.

(ii) **La règle du produit nul est fausse en général :**
On peut avoir $AB = 0_{mp}$ alors que A et B ne sont pas nulles.
Par contre, pour toute matrice A de taille (n,p) : $0_{mn}A = 0_{mp}$ $\quad A0_{pq} = 0_{nq}$

▷ **Exercices 1, 2, 3.**

Définition. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la matrice identité de taille (n, n), notée I_n, est la matrice :

Elle vérifie :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}) \qquad AI_n = A \qquad \text{et} \qquad \forall B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \qquad I_nB = B$$

Définition. Pour tous entiers i et j le symbole de Kronecker δ_{ij} est défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice identité de taille (n, n) est donc la matrice $(\delta_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$.

Remarque. Démontrons que $AI_n = A$:

Proposition. *Pour toutes matrices A, B, C et tout scalaire λ, en supposant que les produits sont définis :*

$$(A+B)C = AC + BC \qquad (\lambda A)B = \lambda(AB) \qquad (AB)C = A(BC)$$
$$A(B+C) = AB + AC \qquad A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

Démonstration. On utilise la linéarité de la somme (Σ) pour les quatre premières.

Démonstration de l'associativité :

▷ **Exercice 4.**

D. Opérations élémentaires

Définitions. Les opérations élémentaires sur une matrice sont :

$(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$	ajout à la ligne i de la ligne j multipliée par α	$(j \neq i,\ \alpha \in \mathbb{K})$
$(L_i \leftarrow \lambda L_i)$	multiplication de la ligne i par λ	$(\lambda \in \mathbb{K}^*)$
$(L_i \leftrightarrow L_j)$	interversion des lignes i et j.	
$(C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j)$	ajout à la colonne i de la colonne j multipliée par α	$(j \neq i,\ \alpha \in \mathbb{K})$
$(C_i \leftarrow \lambda C_i)$	multiplication de la colonne i par λ	$(\lambda \in \mathbb{K}^*)$
$(C_i \leftrightarrow C_j)$	interversion des colonnes i et j.	

Définitions. Les matrices élémentaires sont les matrices que l'on peut obtenir à partir de l'identité grâce à une opération élémentaire.

Plus précisément ce sont, pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, les matrices de taille (n,n) :

- les matrices de transvection : $T_{ij}(\alpha) = I_n + \alpha E_{ij}$ $\quad i \neq j \quad \alpha \in \mathbb{K}$
- les matrices de dilatation : $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ $\quad \lambda \in \mathbb{K}^*$
- les matrices de permutation : $P_{ij} = I_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$

Exemple 2. Soit :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{puis} \quad M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Calculer DM, TM, PM, puis MD, MT, MP.

Proposition. *Les opérations $(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$, $(L_i \leftarrow \lambda L_i)$, $(L_i \leftrightarrow L_j)$ sur une matrice M (à n lignes) reviennent à multiplier M à gauche par $T_{ij}(\alpha)$, $D_i(\lambda)$, P_{ij}.*

Les opérations $(C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i)$, $(C_i \leftarrow \lambda C_i)$, $(C_i \leftrightarrow C_j)$ sur une matrice M (à n colonnes) reviennent à multiplier M à droite par $T_{ij}(\alpha)$, $D_i(\lambda)$, P_{ij}. Attention à la première !

E. Transposition

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. La matrice transposée de A est la matrice notée ${}^tA$ ou $A^\top$ à p lignes et n colonnes dont le coefficient de coordonnées (j,i) est le coefficient de coordonnées (i,j) de A.

En d'autres termes, si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ alors ${}^tA = (a'_{ji})_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\ 1\leqslant i\leqslant n}}$ où $a'_{ji} = a_{ij}$ pour tous i et j.

Exemple.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA =$ Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ alors ${}^tB =$

Remarque. La transposition définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K}) \\ A &\longmapsto {}^tA \end{aligned}$$

Propositions.

(i) Pour toutes matrices A et B de même taille : ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

(ii) Pour toute matrice A et tout scalaire λ : ${}^t(\lambda A) = \lambda({}^tA)$

(iii) Pour toute matrice A de taille (m,n) et toute matrice B de taille (n,p) :
${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

Exemple (suite du précédent).

$AB =$ ${}^tB\,{}^tA =$

Démonstration. Les propriétés sont immédiates pour l'addition et la multiplication par un scalaire.

Pour la multiplication on note pour tous i, j, k tels que $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant p$:

- a_{ij} b_{jk} c_{ik} les coefficients respectifs des matrices A B et AB
- a'_{ji} b'_{kj} c'_{ki} ceux de ${}^tA$ ${}^tB$ ${}^t(AB)$.

Alors pour tout $i \in \{1,\dots,m\}$ et tout $k \in \{1,\dots,p\}$:

$$c'_{ki} = c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a'_{ji}b'_{kj} = \sum_{j=1}^{n} b'_{kj}a'_{ji}$$

Les coefficients de ${}^t(AB)$ sont bien ceux de ${}^tB\,{}^tA$, donc ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$. □

II. Systèmes linéaires

A. Écriture matricielle

Définitions. Soit S un système linéaire de n équations à p inconnues :

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad\ \ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

On définit la matrice A, et les matrices-colonnes X et B par :

On dit que A est la matrice du système linéaire S. Le système s'écrit alors :

$$S : AX = B$$

Cette écriture est l'écriture matricielle du système S.

Exemple 3. Résolution matricielle du système :

$$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 7x + 9y = 1 \end{cases}$$

Remarque. Les opérations élémentaires sur les lignes peuvent être appliquées sur la représentation matricielle, elles modifient les matrices A et B mais pas la matrice X.

En effet, une opération matricielle sur les lignes d'une matrice est obtenu par multiplication à gauche par une matrice élémentaires E, donc :

$$AX = B \qquad \Longrightarrow \qquad E(AX) = EB \qquad \Longrightarrow \qquad (EA)X = EB.$$

Nous verrons que les matrices élémentaires sont inversibles, donc ces implications sont des équivalences :

$$AX = B \qquad \Longleftrightarrow \qquad (EA)X = EB.$$

B. Algorithme du pivot de Gauss

Cet algorithme permet de :

- résoudre un système linéaire,
- prouver qu'une matrice est inversible et de calculer sa matrice inverse,
- calculer le rang d'une matrice (chapitre B11),
- calculer le déterminant d'une matrice carrée (chapitre B12).

Méthode pour les système linéaires.

On utilise uniquement des opérations élémentaires sur les lignes, les unes après les autres.

Plutôt que d'agir sur les systèmes linéaires, on peut agir que les matrices A et B, par opérations élémentaires sur les lignes uniquement.

L'algorithme du pivot généralise à la taille (n, m) celui expliqué dans le chapitre A2.

On admet pour l'instant que les opérations élémentaires sur les lignes d'un système ne changent pas l'ensemble des solutions, *i.e.*, elles donnent des systèmes linéaires équivalents au système de départ.

Exemple 4. Résolution des systèmes :

$$S_1 : \begin{cases} 2x + y + z - t = 4 \\ x + 2y \qquad t = 1 \\ 3x + 5y + z + t = 6 \\ 3x \quad - 2z \quad = 2 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x - 2y + z + t = 2 \\ -x + y - 2z - t = -1 \\ 2x \quad + 6z + 3t = 1 \\ x - 3y \quad + 4t = 6 \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ x + y - 3z + t = 1 \\ x - 3y + z + t = 1 \\ -3x + y + z + t = 1 \end{cases}$$

Le cas des systèmes de Cramer

Dans certains cas on arrive à obtenir une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non-nuls, puis une matrice diagonale, et enfin la matrice identité :

$$1. \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad 2. \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad 3. \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le cas général

Quel que soit le système on peut obtenir une matrice de la forme :

où les $a_{i\,j_i}$ sont non-nuls, puis :

Définitions. Une matrice est dite échelonnée par lignes si chaque ligne non-nulle commence par strictement plus de zéros que la précédente.

Les premiers coefficients **non-nuls** de chaque ligne sont notés :

$$a_{1\,j_1} \quad a_{2\,j_2} \quad \dots \quad a_{r\,j_r}$$

Ils sont appelés pivots de la matrice. Leur nombre r vérifie $r \leqslant n$ et $r \leqslant p$.

Une matrice est dite échelonnée réduite par lignes si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non-nuls de leurs colonnes.

Un système linéaire est dit échelonné ou échelonné réduit si sa matrice est échelonnée par lignes ou échelonnée réduite par ligne.

Théorème. *Toute système linéaire est équivalent à un système linéaire échelonné réduit.*

<u>Démonstration</u>. En effet l'algorithme du pivot de Gauss montre qu'à partir de toute matrice A on peut obtenir une matrice échelonnée par ligne réduite en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes, donc tout système $AX = B$ est équivalent à un système échelonné réduit. □

Définitions. Soit $j_1, \dots, j_r$ les numéros des colonnes des pivots d'un système échelonné réduit. Alors les inconnues x_{j_i} sont appelées <u>inconnues principales</u>, les autres sont appelées <u>inconnues secondaires</u> ou <u>paramètres</u>.

Remarque. Grâce à la matrice échelonnée réduite on peut alors exprimer les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires.

Exemple 5. Résolution du système d'écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

▷ **Exercice 5.**

C. <u>Structure de l'ensemble des solutions</u>

Théorème. *Un système linéaire admet ou bien une infinité de solution, ou bien une unique solution, ou sinon aucune solution.*

<u>Démonstration</u>. Par opérations élémentaires un système linéaire est équivalent à un système échelonné réduit de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & & & & & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \vdots & & & \\
\vdots & & & & & & & & & & & & 0 & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & & & & & & & \cdots & 0
\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_r \\ c_{r+1} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Les lignes L_{r+1} à L_n sont de la forme $0 = c_i$. Si l'un des c_i est non-nul alors le système n'admet pas de solution.

Sinon, les lignes L_1 à L_r permettent d'exprimer les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires. S'il existe au moins une inconnue secondaire alors on obtient une infinité de solutions, sinon on obtient une unique solution. □

Remarques. Le nombre d'inconnues secondaires est $p - r$.

Si $n = p$ alors le seul cas où le système admet une et une seule solution est le cas où $r = n = p$, la matrice échelonnée réduite obtenue est alors la matrice identité.

Définition. Un système qui n'admet pas de solution est dit incompatible, un système qui admet au moins une solution est dit compatible.

Définition. Un système linéaire est dit homogène si son second membre est nul.

Si S est un système linéaire, alors le système homogène associé à S est le système S_0 dont les coefficients sont égaux à ceux de S sauf ceux de son second membre qui sont nuls.

Si S s'écrit $AX = B$ alors S_0 s'écrit $AX = 0$, où 0 est la matrice colonne nulle à n lignes.

Remarque. Un système homogène admet toujours au moins une solution : le p-uplet nul.

Théorème. *Soit S un système linéaire, et S_0 le système homogène associé. On suppose que le système S est compatible, et on note $x = (x_1, \dots, x_p)$ une de ses solutions, que l'on appelle solution particulière de S.*

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de S et $\mathcal{S}_0$ celui de S_0.

Alors l'ensemble des solutions de S est l'ensemble des p-uplets $x+y = (x_1+y_1, \dots, x_p+y_p)$ où y est élément de $\mathcal{S}_0$.

Exemple 4 (suite). Réécriture des solutions du système S_2.

Démonstration. Notons $AX = B$ l'écriture matricielle du système S. Alors le système homogène associé s'écrit $AX = 0$.

Soit X la représentation matricielle de $x = (x_1, \dots, x_p)$, c'est-à-dire la matrice colonne dont les coefficients sont les x_i. Alors $AX = B$.

Soit $y = (y_1, \dots, y_p)$ une solution du système homogène S_0, et Y sa représentation matricielle. Alors $AY = 0$.

Par somme on obtient $A(X + Y) = B + 0 = B$, donc $x + y$ est solution de S.

Nous avons démontré que $\{x + y \mid y \in \mathcal{S}_0\} \subseteq \mathcal{S}$.

Soit maintenant $z = (z_1, \dots, z_p)$ un élément de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire une solution de S. Soit Z sa représentation matricielle. Alors $AZ = B$. Or $AX = B$, donc par soustraction $A(Z - X) = B - B = 0$, et donc $Z - X$ est solution du système S_0, *i.e.*, $z - x$ appartient à $\mathcal{S}_0$. Or $z = x + (z - x)$, ce qui montre que $z \in \{x + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}$.

Nous avons démontré l'inclusion $\mathcal{S} \subseteq \{x + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}$.

Le théorème est démontré par double inclusion. □

III. Matrices carrées

Définitions. Une matrice de taille (n,n) est dite carrée.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de matrices carrées de taille (n,n) à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Les coefficients a_{ii} $(i=1,\ldots,n)$ d'une matrice carrée sont ses coefficients diagonaux.

A. Matrices triangulaires et diagonales

Définitions. Une matrice carrée $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est dite :

- diagonale si : $\forall i\neq j \quad a_{ij}=0$
- triangulaire supérieure si : $\forall i>j \quad a_{ij}=0$
- triangulaire inférieure si : $\forall i<j \quad a_{ij}=0$

Proposition. *La somme et le produit de deux matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures, resp. triangulaires inférieures) sont diagonales (resp. triangulaires supérieures, resp. triangulaires inférieures).*

Démonstration. Pour la somme on note :

$$A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \qquad B=(b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \qquad C=A+B=(c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

Alors le coefficient (i,j) de C vérifie $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, il est donc nul si a_{ij} et b_{ij} sont nuls. Ceci prouve la propriété pour la somme.

Démonstration pour le produit.

Remarque. De même, si A est diagonale (resp. triangulaire supérieure, resp. triangulaire inférieure), et λ est un scalaire, alors λA est diagonale (resp. triangulaire supérieure, resp. triangulaire inférieure).

Définition. Pour tous scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ on note :

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) =$$

Proposition. *Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $\mu_1, \ldots, \mu_n$ des scalaires. Alors :*

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \operatorname{diag}(\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n)$$

B. Matrices symétriques et antisymétriques

Définitions. Une matrice carrée A est dite :
- symétrique si ${}^tA = A$
- antisymétrique si ${}^tA = -A$

En d'autres termes, en notant $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$:
- A est symétrique si : $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \quad a_{ij} = a_{ji}$
- A est antisymétrique si : $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \quad a_{ij} = -a_{ji}$
  Ceci implique que la diagonale est nulle.

Exemple.

Proposition. *Toute matrice carrée s'exprime de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.*

Démonstration. Soit M une matrice carrée. On pose $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$. Ces matrices sont bien définies car M est carrée. Leurs transposées sont :

$${}^tS = \frac{1}{2}\left({}^tM + M\right) = S \qquad {}^tA = \frac{1}{2}\left({}^tM - M\right) = -A$$

Ainsi S est symétrique, A est antisymétrique. De plus $M = S + A$, ce qui montre bien que M s'exprime comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Démontrons l'unicité. Si $M = S + A$ avec S symétrique et A antisymétrique, alors ${}^tM = {}^tS + {}^tA = S - A$, donc $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$. Les matrices S et A sont uniquement déterminées. □

▷ **Exercice 6.**

C. Puissances

Exemple 6. Calculer les puissances des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Proposition. *Cas d'une matrice diagonale :*

▷ **Exercice 7.**

Exemple 7. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Calculer A^2, B^2, AB, BA.

(ii) Calculer $(A+B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$.

Proposition. *(Formule du binôme) Soit A et B deux matrices telles que $AB = BA$. Alors pour tout entier naturel n :*

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Exemple 8. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants.

(i) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ en utilisant : $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

▷ **Exercice 8.**

D. Matrices inversibles

Définitions. Une matrice A est dite inversible si elle est carrée et s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I_n$.

L'ensemble des matrices inversibles de taille (n, n) est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et appelé groupe linéaire.

Remarque. Si A est inversible, et si B et B' vérifient $AB = BA = I_n$ et $AB' = B'A = I_n$, alors $BAB' = B = B'$. Ainsi, si A est inversible alors il existe une unique matrice B telle que $AB = BA = I_n$.

Définition. Si A est inversible alors la matrice B telle que $AB = BA = I_n$ est appelée matrice inverse de A, et notée A^{-1}.

Exemple 9.

(i) Si $n = 1$, alors $A = (a)$ est inversible si et seulement si $a \neq 0$, et $(a)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \end{pmatrix} = (a^{-1})$.

(ii) La matrice nulle n'est pas inversible, car pour toute matrice B : $0_n B = 0_n \neq I_n$

(iii) La matrice identité est inversible, d'inverse elle-même.

(iv) Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas inversibles.

(v) La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse : $\begin{pmatrix} -2 & \frac{5}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(vi) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. Par contre la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ \frac{4}{7} & -\frac{12}{7} & \frac{5}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{13}{7} & -\frac{6}{7} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{7} \begin{pmatrix} -7 & 21 & -7 \\ 4 & -12 & 5 \\ -2 & 13 & -6 \end{pmatrix}$

Propositions. *Soit A et B deux matrices carrées de même taille.*

(i) Si A est B sont inversibles alors le produit AB est inversible, d'inverse :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(ii) Si A est inversible alors A^{-1} est inversible, d'inverse A.

(iii) Si A est inversible alors ${}^tA$ est inversible, et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Démonstration.

T. S. V. P.

Exemple 8 (suite). On vérifie que les formules obtenues pour $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ sont valables aussi pour $n = -1$.
On vérifie de même les formules obtenues dans les exercices 7 et 8 pour $n = -1$.

Proposition. *Les matrices élémentaires sont inversibles, d'inverses :*

$T_{ij}(\alpha)^{-1} =$ $D_i(\lambda)^{-1} =$ $P_{ij}^{-1} =$

Démonstration. Il suffit de vérifier les produits. □

Remarque. Effectivement :
- Les opérations élémentaires $(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$ puis $(L_i \leftarrow L_i - \alpha L_j)$ sur une matrice ne changent pas cette matrice.
- De même pour les opérations élémentaires $(L_i \leftarrow \lambda L_i)$ puis $(L_i \leftarrow \lambda^{-1} L_i)$.
- De même pour les opérations élémentaires $(L_i \leftrightarrow L_j)$ puis $(L_i \leftrightarrow L_j)$.

Corollaire.
(i) Un produit de matrices élémentaires est inversible.
(ii) Les opérations élémentaires sur une matrice ne changent pas son caractère inversible.
(iii) Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire donnent un système équivalent.

Démonstration.
(i) Un produit de matrices inversibles est inversible, les matrices élémentaires sont inversibles, donc un produit de matrices élémentaires est inversible.
(ii) Soit A et E deux matrices carrées, E étant élémentaire. Alors E est inversible, donc il admet une matrice inverse E^{-1}.
Un produit de matrices inversibles est inversible donc :
$$A \text{ inversible} \implies EA \text{ inversible} \implies E^{-1}EA \text{ inversible}$$
Ceci montre que A est inversible si et seulement si EA est inversible.
(iii) Soit $AX = B$ l'écriture matricielle d'un système linéaire S, et E une matrice élémentaire. Comme E est inversible alors :
$$AX = B \iff EAX = EB$$
Donc l'opération élémentaire de matrice E donne un système linéaire équivalent au système S. □

IV. Inversion des matrices et systèmes de Cramer

A. Systèmes de Cramer

Définition. Un système linéaire est dit de Cramer si sa matrice est inversible.

Théorème. *Un système de Cramer admet une et une seule solution.*

Démonstration. On considère l'écriture matricielle $AX = B$ d'un système de Cramer. Alors A est inversible, donc par multiplication à droite par A^{-1} et par A on obtient :

Ceci montre que $A^{-1}B$ est l'unique solution du système. □

Remarque. On constate que la résolution d'un système linéaire de Cramer $AX = B$ revient au calcul de A^{-1}.

Remarque. Nous verrons qu'un système de n équations à p inconnues est de Cramer si et seulement si $n = p = r$, où r est le nombre de pivots que l'on obtient par l'algorithme du pivot de Gauss. Ce nombre de pivot est appelé rang du système.

B. Théorie

Définition. Deux matrices A et A' sont dites équivalentes par lignes si on peut passer de l'une à l'autre par un nombre fini d'opérations élémentaires.
On note alors $A \underset{L}{\sim} A'$.

Remarques.

(i) Ceci signifie qu'il existe des matrices élémentaires $E_1, \ldots, E_m$ telles que :

$$A' = E_m \times \cdots \times E_1 \times A$$

(ii) Il s'agit d'une relation d'équivalence.

(iii) Si A et A' sont équivalentes par lignes alors elles ont même taille.

Théorème. *Toute matrice est équivalente par ligne à une matrice échelonnée réduite par lignes.*

Remarque. Il s'agit d'une autre écriture du théorème similaire sur les systèmes linéaires, conséquence de l'algorithme du pivot de Gauss.
Autre formulation : Pour toute matrice A il existe une matrice E produit de matrices élémentaires et une matrice R échelonnée réduite par lignes telles que $A = ER$.
La matrice R est de même taille de A, alors que la matrice E est carrée et inversible.

Théorème. *Soit A une matrice carrée de taille (n,n). Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) A est inversible

(ii) Pour toute matrice-colonne à n lignes B, le système $AX = B$ admet une unique solution.

(iii) Pour toute matrice-colonne à n lignes B, le système $AX = B$ admet au moins une solution.

(iv) $A \underset{L}{\sim} I_n$

Démonstration.

(i)$\Longrightarrow$*(ii)* : si A est inversible alors le système $AX = B$ est de Cramer donc il admet une et une seule solution.

(ii)$\Longrightarrow$*(iii)* est évident.

(iii)$\Longrightarrow$*(iv)* : Soit R une matrice échelonnée réduite équivalente par lignes à A, et E un produit de matrices élémentaires telle que $A = ER$.

On raisonne par contraposée, en supposant que R n'est pas l'identité.

Alors R est carrée et échelonnée réduite mais n'est pas l'identité, donc sa dernière ligne ne contient que des 0. Notons B' est la matrice-colonne ne contenant que des 0 sauf un 1 en dernière ligne. Alors Le système $RX = B'$ n'a pas de solution.

Comme E est inversible alors $RX = B'$ équivaut à $AX = EB'$, puis à $AX = B$ si on note $B = EB'$. Ainsi on obtient une matrice-colonne B telle que le système $AX = B$ n'admet pas de solution, et l'hypothèse *(iii)* est fausse.

Par contraposée, si l'hypothèse *(iii)* est valide alors $R = I_n$, *i.e.*, $A \underset{L}{\sim} I_n$.

(iv)$\Longrightarrow$*(i)* : Si $A \underset{L}{\sim} I_n$, alors il existe une matrice E produit de matrices élémentaires tel que $A = EI_n$. Ainsi $A = E$, et comme E est inversible alors A est inversible.

Finalement on a bien démontré que les propositions *(i)* à *(iv)* sont équivalentes. □

Corollaire. *Soit S un système de n équations à p inconnues, et r le nombre de pivots que l'on obtient par l'algorithme du pivot de Gauss.*
Alors le système S est de Cramer si et seulement si $n = p = r$.

Démonstration. Soit $AX = B$ l'écriture matricielle du système S.

Si ce système est de Cramer alors sa matrice est inversible donc elle est carrée, *i.e.*, $n = p$.

On rappelle que le nombre d'inconnues secondaires est $p - r$. Si le système est de Cramer alors il ne peut avoir d'inconnue secondaire donc $r = p$.

Réciproquement, si $n = p = r$ alors le système admet une et une seule solution, donc A est inversible d'après le théorème ci-dessus. □

Théorème. *Soit A une matrice carrée de taille (n, n).*
S'il existe une matrice C telle que $AC = I_n$, alors A est inversible et C est son inverse, donc $CA = I_n$.
S'il existe une matrice D telle que $DA = I_n$ alors A est inversible et D est son inverse, donc $AD = I_n$.

Remarque.

(i) Ainsi dans le cas d'une matrice carrée, il suffit de vérifier $AB = I_n$ et non $BA = I_n$ pour pouvoir affirmer que A est inversible et que son inverse est B.

(ii) Attention : ceci n'est valable que pour une matrice carrée.

Exemple 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

C. Pratique

Méthode. Soit A une matrice carrée. On souhaite déterminer si elle est inversible, et si c'est le cas calculer sa matrice inverse.

On écrit $AA' = I_n$ où A' est une matrice carrée non explicitée. Par opérations sur les lignes on obtient des égalités équivalentes. Si A est inversible alors on aboutit par l'algorithme du pivot de Gauss à $A' = A^{-1}$.

En effet, l'algorithme du pivot de Gauss consiste à multiplier à gauche par un produit de matrices élémentaires, jusqu'à arriver à une matrice échelonnée réduite par lignes R. Si $A = ER$ avec E produit de matrices élémentaires alors $AA' = I_n$ donne $RA' = E^{-1}$.

Si A n'est pas inversible alors on obtient une contradiction, car la dernière ligne de la matrice R est nulle.
Si A est inversible alors $R = I_n$, donc $A = E$, puis $A' = A^{-1}$.

Exemple 11. Inverser $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ puis $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Méthode 2. Une autre possibilité consiste à résoudre le système $AX = Y$ où X et Y sont deux matrices inconnues. Effet, si A est inversible alors :

$$AX = Y \qquad \Longleftrightarrow \qquad X = A^{-1}Y$$

Exemple 12. Calcul de l'inverse des matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On utilise le lemme suivant :

Lemme. *Soit A et B deux matrices carrées de tailles (n, n). Si pour toutes matrices colonnes X et Y à n lignes l'implication suivante est vraie :*

$$AX = Y \qquad \Longrightarrow \qquad X = BY$$

alors A est inversible et B est son inverse.

Démonstration. Si X est la matrice colonne E_i ne contenant que des zéros sauf un 1 en ligne i, alors AE_i est la colonne i de A, que l'on note C_i. Comme $AE_i = C_i$ alors $E_i = BC_i$. Mais les matrices colonnes BC_i sont les colonnes de la matrice BA, alors que les E_i sont les colonnes de la matrice identité. On en déduit $BA = I_n$. Comme les matrices A et B sont carrées, par théorème A est inversible et B est son inverse. □

▷ **Exercices 9, 10.**

D. Cas $n = 2$

Proposition. *Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas :*

Corollaire. *Le système S : $\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$ est de Cramer si et seulement si $ad - bc \neq 0$.*

Définition. Le réel $ad - bc$ est appelé déterminant de la matrice A, ou du système S.

On note :

Démonstration.

Proposition (Formules de Cramer pour $n = 2$).

Soit S : $\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$ *un système de Cramer. Ses solutions sont :*

Démonstration.

Exemple 13. Résoudre : $\begin{cases} 3x + 4y = 3 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$

▷ **Exercice 11.**