

Chapitre B5

Matrices

On note n et p deux entiers naturels non-nuls, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Les éléments de \mathbb{K} sont appelés scalaires.

I. Définitions

A. Matrices

Définition. Une matrice de taille (n, p) à coefficients dans \mathbb{K} est un tableau de n lignes et p colonnes :

où les coefficients a_{ij} ou $a_{i,j}$ sont éléments de \mathbb{K} . Ils sont indexés par i (indice de ligne) et j (indice de colonne).

Notation. L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{K} est noté :

Exemples.

- (i) La matrice nulle est notée 0_{np} ou $0_{n,p}$, elle ne contient que des 0.
- (ii) Une matrice de taille $(1, p)$ est appelée matrice-ligne, une matrice de taille $(n, 1)$ est appelée matrice-colonne.

Remarque. Deux matrices sont égales si et seulement si elles sont de même taille et tous leurs coefficients sont égaux.

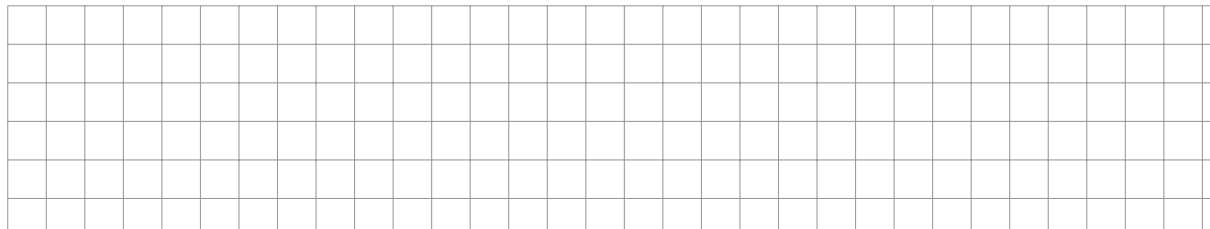
Notation. La matrice A définie ci-dessus peut être notée :

Définition. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, et soit A_1, \dots, A_m des matrices de taille (n, p) puis $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ des scalaires. Alors la matrice

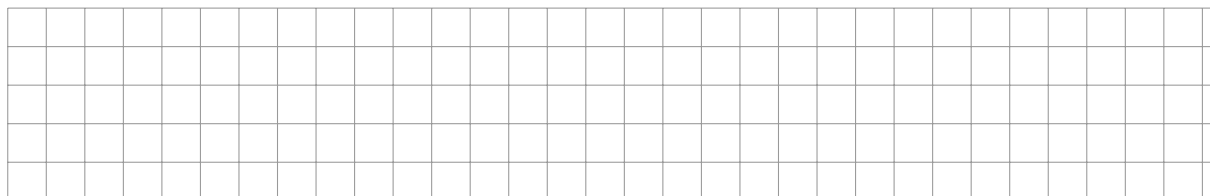
$$\sum_{k=1}^m \lambda_k A_k = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_m A_m$$

est appelée combinaison linéaire des matrices A_1, \dots, A_m .

Définition. Pour tout $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, p$ on note E_{ij} la matrice de taille (n, p) dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1.



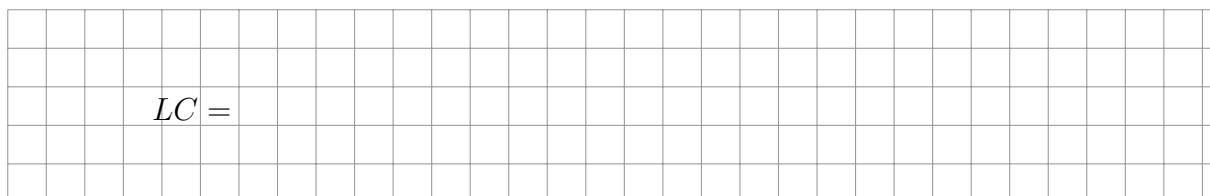
Proposition. Toute matrice $A = (a_{ij})$ se décompose de façon unique comme combinaison linéaire des matrices E_{ij} : $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} E_{ij}$



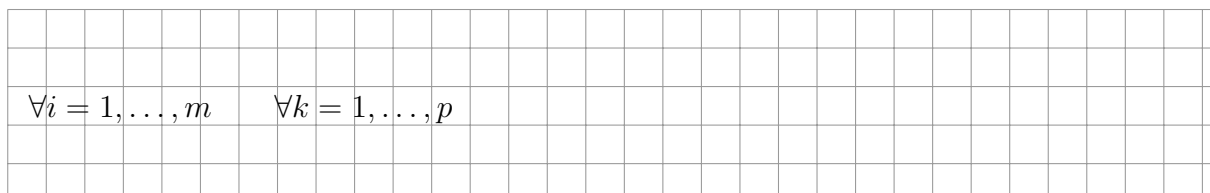
C. Multiplication

Définition.

Soit L une matrice-ligne à n coefficients, et C une matrice-colonne à n coefficients. Le produit LC est le réel :



Soit A une matrice de taille (m, n) , B une matrice de taille (n, p) . Alors le produit AB est la matrice C de taille (m, p) dont les coefficients sont



Remarques.

(i) La multiplication matricielle définit l'application suivante :

(ii) Le coefficient (i, k) est le produit de la ligne i de A par la colonne k de B .

Exemple 1. Calculer AB et BA dans les cas suivants :

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (ii) \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 9 \end{pmatrix} \quad (iv) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(v) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (vi) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Remarques.

(i) **La multiplication matricielle n'est pas commutative :**

Il est faux en général que $AB = BA$.

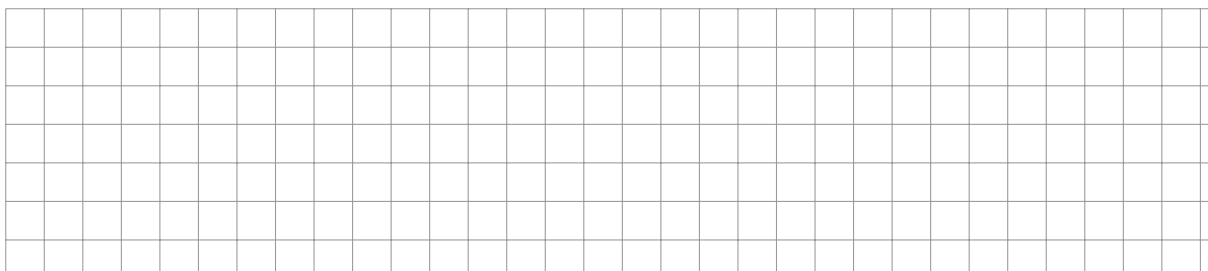
(ii) **La règle du produit nul est fautive en général :**

On peut avoir $AB = 0_{mp}$ alors que A et B ne sont pas nulles.

Par contre, pour toute matrice A de taille (n, p) : $0_{mn}A = 0_{mp} \quad A0_{pq} = 0_{nq}$

▷ **Exercices 1, 2, 3.**

Définition. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la matrice identité de taille (n, n) , notée I_n , est la matrice :



Elle vérifie :

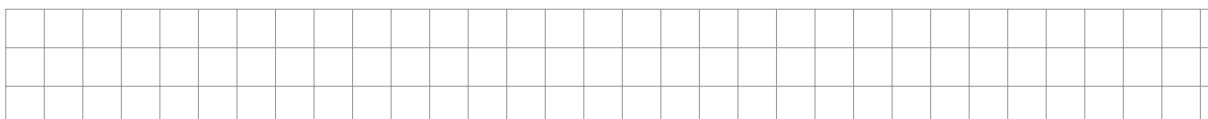
$$\forall A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}) \quad AI_n = A \quad \text{et} \quad \forall B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \quad I_n B = B$$

Définition. Pour tous entiers i et j le symbole de Kronecker δ_{ij} est défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice identité de taille (n, n) est donc la matrice $(\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Remarque. Démontrons que $AI_n = A$:



Proposition. Pour toutes matrices A, B, C et tout scalaire λ , en supposant que les produits sont définis :

$$\begin{aligned} (A + B)C &= AC + BC & (\lambda A)B &= \lambda(AB) & (AB)C &= A(BC) \\ A(B + C) &= AB + AC & A(\lambda B) &= \lambda(AB) & & \end{aligned}$$

Démonstration. On utilise la linéarité de la somme (Σ) pour les quatre premières.

Démonstration de l'associativité :



▷ **Exercice 4.**

D. Opérations élémentaires

Définitions. Les opérations élémentaires sur une matrice sont :

$$(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j) \quad \text{ajout à la ligne } i \text{ de la ligne } j \text{ multipliée par } \alpha \quad (j \neq i, \alpha \in \mathbb{K})$$

$$(L_i \leftarrow \lambda L_i) \quad \text{multiplication de la ligne } i \text{ par } \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{K}^*)$$

$$(L_i \leftrightarrow L_j) \quad \text{intersion des lignes } i \text{ et } j.$$

$$(C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j) \quad \text{ajout à la colonne } i \text{ de la colonne } j \text{ multipliée par } \alpha \quad (j \neq i, \alpha \in \mathbb{K})$$

$$(C_i \leftarrow \lambda C_i) \quad \text{multiplication de la colonne } i \text{ par } \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{K}^*)$$

$$(C_i \leftrightarrow C_j) \quad \text{intersion des colonnes } i \text{ et } j.$$

Définitions. Les matrices élémentaires sont les matrices que l'on peut obtenir à partir de l'identité grâce à une opération élémentaire.

Plus précisément ce sont, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, les matrices de taille (n, n) :

- les matrices de transvection : $T_{ij}(\alpha) = I_n + \alpha E_{ij} \quad i \neq j \quad \alpha \in \mathbb{K}$
- les matrices de dilatation : $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii} \quad \lambda \in \mathbb{K}^*$
- les matrices de permutation : $P_{ij} = I_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$



Exemple 2. Soit :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{puis } M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Calculer DM, TM, PM , puis MD, MT, MP .

Proposition. Les opérations $(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j), (L_i \leftarrow \lambda L_i), (L_i \leftrightarrow L_j)$ sur une matrice M (à n lignes) reviennent à multiplier M à gauche par $T_{ij}(\alpha), D_i(\lambda), P_{ij}$.

Les opérations $(C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i), (C_i \leftarrow \lambda C_i), (C_i \leftrightarrow C_j)$ sur une matrice M (à n colonnes) reviennent à multiplier M à droite par $T_{ij}(\alpha), D_i(\lambda), P_{ij}$. Attention à la première !

E. Transposition

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. La matrice transposée de A est la matrice notée tA ou A^T à p lignes et n colonnes dont le coefficient de coordonnées (j, i) est le coefficient de coordonnées (i, j) de A .

En d'autres termes, si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ alors ${}^tA = (a'_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq n}}$ où $a'_{ji} = a_{ij}$ pour tous i et j .

Exemple.		
Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$	alors ${}^tA =$	Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$
		alors ${}^tB =$

Remarque. La transposition définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K}) \\ A &\longmapsto {}^tA \end{aligned}$$

Propositions.

- (i) Pour toutes matrices A et B de même taille : ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
- (ii) Pour toute matrice A et tout scalaire λ : ${}^t(\lambda A) = \lambda({}^tA)$
- (iii) Pour toute matrice A de taille (m, n) et toute matrice B de taille (n, p) : ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$

Exemple (suite du précédent).	
$AB =$	${}^tB {}^tA =$

Démonstration. Les propriétés sont immédiates pour l'addition et la multiplication par un scalaire.

Pour la multiplication on note pour tous i, j, k tels que $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq p$:

- $a_{ij} b_{jk} c_{ik}$ les coefficients respectifs des matrices A, B et AB
- $a'_{ji} b'_{kj} c'_{ki}$ ceux de ${}^tA, {}^tB, {}^t(AB)$.

Alors pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et tout $k \in \{1, \dots, p\}$:

$$c'_{ki} = c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^n a'_{ji} b'_{kj} = \sum_{j=1}^n b'_{kj} a'_{ji}$$

Les coefficients de ${}^t(AB)$ sont bien ceux de ${}^tB {}^tA$, donc ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$. \square

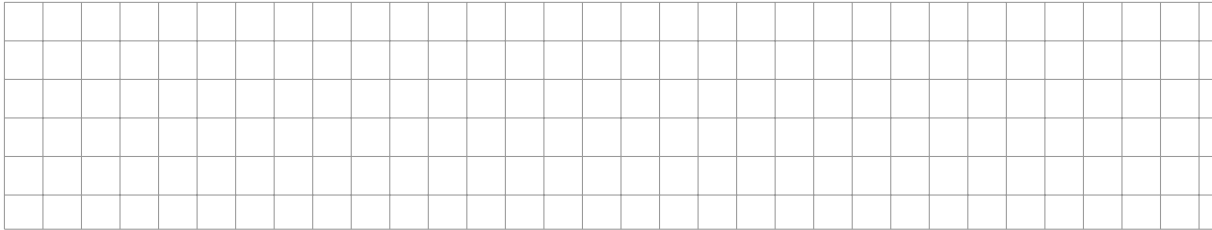
II. Systèmes linéaires

A. Écriture matricielle

Définitions. Soit S un système linéaire de n équations à p inconnues :

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

On définit la matrice A , et les matrices-colonnes X et B par :



On dit que A est la matrice du système linéaire S . Le système s'écrit alors :

$$S : AX = B$$

Cette écriture est l'écriture matricielle du système S .

Exemple 3. Résolution matricielle du système :

$$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 7x + 9y = 1 \end{cases}$$



Remarque. Les opérations élémentaires sur les lignes peuvent être appliquées sur la représentation matricielle, elles modifient les matrices A et B mais pas la matrice X .

En effet, une opération matricielle sur les lignes d'une matrice est obtenu par multiplication à gauche par une matrice élémentaires E , donc :

$$AX = B \quad \implies \quad E(AX) = EB \quad \implies \quad (EA)X = EB.$$

Nous verrons que les matrices élémentaires sont inversibles, donc ces implications sont des équivalences :

$$AX = B \quad \iff \quad (EA)X = EB.$$

B. Algorithme du pivot de Gauss

Cet algorithme permet de :

- résoudre un système linéaire,
- prouver qu'une matrice est inversible et de calculer sa matrice inverse,
- calculer le rang d'une matrice (chapitre B11),
- calculer le déterminant d'une matrice carrée (chapitre B12).

Méthode pour les système linéaires.

On utilise uniquement des opérations élémentaires sur les lignes, les unes après les autres. Plutôt que d'agir sur les systèmes linéaires, on peut agir que les matrices A et B , par opérations élémentaires sur les lignes uniquement.

L'algorithme du pivot généralise à la taille (n, m) celui expliqué dans le chapitre A2.

On admet pour l'instant que les opérations élémentaires sur les lignes d'un système ne changent pas l'ensemble des solutions, *i.e.*, elles donnent des systèmes linéaires équivalents au système de départ.

Exemple 4. Résolution des systèmes :

$$S_1 : \begin{cases} 2x + y + z - t = 4 \\ x + 2y \quad \quad t = 1 \\ 3x + 5y + z + t = 6 \\ 3x \quad \quad - 2z \quad \quad = 2 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} x - 2y + z + t = 2 \\ -x + y - 2z - t = -1 \\ 2x \quad \quad + 6z + 3t = 1 \\ x - 3y \quad \quad + 4t = 6 \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ x + y - 3z + t = 1 \\ x - 3y + z + t = 1 \\ -3x + y + z + t = 1 \end{cases}$$

Le cas des systèmes de Cramer

Dans certains cas on arrive à obtenir une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non-nuls, puis une matrice diagonale, et enfin la matrice identité :

$$1. \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \quad a_{nn} \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le cas général

Quel que soit le système on peut obtenir une matrice de la forme :



où les $a_{i j_i}$ sont non-nuls, puis :



Définitions. Une matrice est dite échelonnée par lignes si chaque ligne non-nulle commence par strictement plus de zéros que la précédente.

Les premiers coefficients **non-nuls** de chaque ligne sont notés :

$$a_{1 j_1} \quad a_{2 j_2} \quad \dots \quad a_{r j_r}$$

Ils sont appelés pivots de la matrice. Leur nombre r vérifie $r \leq n$ et $r \leq p$.

Une matrice est dite échelonnée réduite par lignes si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non-nuls de leurs colonnes.

Un système linéaire est dit échelonné ou échelonné réduit si sa matrice est échelonnée par lignes ou échelonnée réduite par ligne.

Théorème. *Tout système linéaire est équivalent à un système linéaire échelonné réduit.*

Démonstration. En effet l'algorithme du pivot de Gauss montre qu'à partir de toute matrice A on peut obtenir une matrice échelonnée par ligne réduite en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes, donc tout système $AX = B$ est équivalent à un système échelonné réduit. \square

Définitions. Soit j_1, \dots, j_r les numéros des colonnes des pivots d'un système échelonné réduit. Alors les inconnues x_{j_i} sont appelées inconnues principales, les autres sont appelées inconnues secondaires ou paramètres.

Remarque. Grâce à la matrice échelonnée réduite on peut alors exprimer les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires.

Exemple 5. Résolution du système d'écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

▷ **Exercice 5.**

C. Structure de l'ensemble des solutions

Théorème. *Un système linéaire admet ou bien une infinité de solution, ou bien une unique solution, ou sinon aucune solution.*

Démonstration. Par opérations élémentaires un système linéaire est équivalent à un système échelonné réduit de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & * & \dots & * & 0 & * & \dots & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & & & & \dots & 0 & \boxed{1} & * & \dots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & & & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & \dots & 0 & \boxed{1} & * & \dots & * \\ \vdots & & & & & & & & & & & \dots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \dots & 0 & & \vdots \\ 0 & \dots & & & & & & & & & & & \dots & 0 & & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_r \\ c_{r+1} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Les lignes L_{r+1} à L_n sont de la forme $0 = c_i$. Si l'un des c_i est non-nul alors le système n'admet pas de solution.

Sinon, les lignes L_1 à L_r permettent d'exprimer les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires. S'il existe au moins une inconnue secondaire alors on obtient une infinité de solutions, sinon on obtient une unique solution. \square

Remarques. Le nombre d'inconnues secondaires est $p - r$.

Si $n = p$ alors le seul cas où le système admet une et une seule solution est le cas où $r = n = p$, la matrice échelonnée réduite obtenue est alors la matrice identité.

III. Matrices carrées

Définitions. Une matrice de taille (n, n) est dite carrée.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de matrices carrées de taille (n, n) à coefficients dans \mathbb{K} .

Les coefficients a_{ii} ($i = 1, \dots, n$) d'une matrice carrée sont ses coefficients diagonaux.

A. Matrices triangulaires et diagonales

Définitions. Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dite :

- diagonale si : $\forall i \neq j \quad a_{ij} = 0$
- triangulaire supérieure si : $\forall i > j \quad a_{ij} = 0$
- triangulaire inférieure si : $\forall i < j \quad a_{ij} = 0$

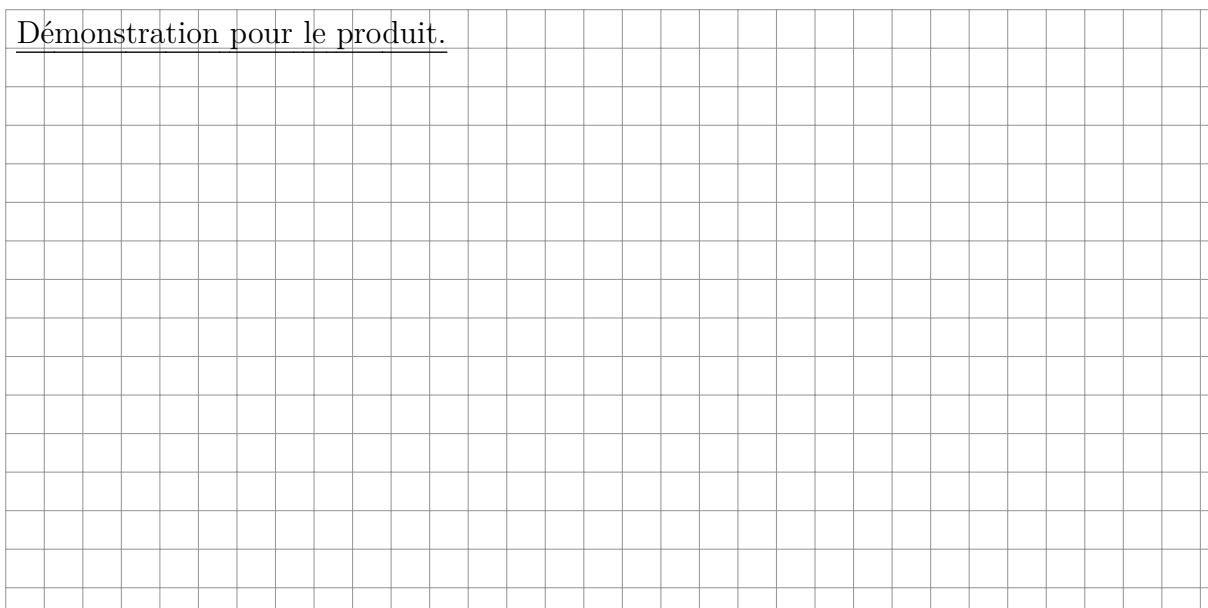


Proposition. *La somme et le produit de deux matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures, resp. triangulaires inférieures) sont diagonales (resp. triangulaires supérieures, resp. triangulaires inférieures).*

Démonstration. Pour la somme on note :

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad C = A + B = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

Alors le coefficient (i, j) de C vérifie $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, il est donc nul si a_{ij} et b_{ij} sont nuls. Ceci prouve la propriété pour la somme.



Remarque. De même, si A est diagonale (resp. triangulaire supérieure, resp. triangulaire inférieure), et λ est un scalaire, alors λA est diagonale (resp. triangulaire supérieure, resp. triangulaire inférieure).

Définition. Pour tous scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ on note :

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =$$

Proposition. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et μ_1, \dots, μ_n des scalaires. Alors :

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \text{diag}(\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_n \mu_n)$$

B. Matrices symétriques et antisymétriques

Définitions. Une matrice carrée A est dite :

- symétrique si ${}^tA = A$
- antisymétrique si ${}^tA = -A$

En d'autres termes, en notant $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$:

- A est symétrique si : $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \quad a_{ij} = a_{ji}$
- A est antisymétrique si : $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \quad a_{ij} = -a_{ji}$

Ceci implique que la diagonale est nulle.

Exemple.

Proposition. Toute matrice carrée s'exprime de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Démonstration. Soit M une matrice carrée. On pose $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$. Ces matrices sont bien définies car M est carrée. Leurs transposées sont :

$${}^tS = \frac{1}{2}({}^tM + M) = S \quad {}^tA = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -A$$

Ainsi S est symétrique, A est antisymétrique. De plus $M = S + A$, ce qui montre bien que M s'exprime comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Démontrons l'unicité. Si $M = S + A$ avec S symétrique et A antisymétrique, alors ${}^tM = {}^tS + {}^tA = S - A$, donc $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$. Les matrices S et A sont uniquement déterminées. □

▷ **Exercice 6.**

C. Puissances**Exemple 6.** Calculer les puissances des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Proposition. Cas d'une matrice diagonale :																			

▷ **Exercice 7.****Exemple 7.** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.(i) Calculer A^2 , B^2 , AB , BA .(ii) Calculer $(A + B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$.**Proposition.** (Formule du binôme) Soit A et B deux matrices telles que $AB = BA$. Alors pour tout entier naturel n :

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Exemple 8. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants.

(i) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ en utilisant : $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

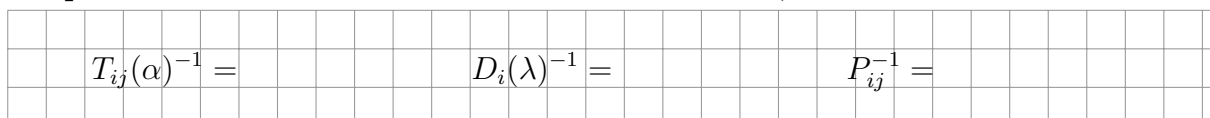
▷ **Exercice 8.**



Exemple 8 (suite). On vérifie que les formules obtenues pour $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ sont valables aussi pour $n = -1$.

On vérifie de même les formules obtenues dans les exercices 7 et 8 pour $n = -1$.

Proposition. *Les matrices élémentaires sont inversibles, d'inverses :*



Démonstration. Il suffit de vérifier les produits. □

Remarque. Effectivement :

- Les opérations élémentaires $(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$ puis $(L_i \leftarrow L_i - \alpha L_j)$ sur une matrice ne changent pas cette matrice.
- De même pour les opérations élémentaires $(L_i \leftarrow \lambda L_i)$ puis $(L_i \leftarrow \lambda^{-1} L_i)$.
- De même pour les opérations élémentaires $(L_i \leftrightarrow L_j)$ puis $(L_i \leftrightarrow L_j)$.

Corollaire.

- (i) *Un produit de matrices élémentaires est inversible.*
- (ii) *Les opérations élémentaires sur une matrice ne changent pas son caractère inversible.*
- (iii) *Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire donnent un système équivalent.*

Démonstration.

(i) Un produit de matrices inversibles est inversible, les matrices élémentaires sont inversibles, donc un produit de matrices élémentaires est inversible.

(ii) Soit A et E deux matrices carrées, E étant élémentaire. Alors E est inversible, donc il admet une matrice inverse E^{-1} .

Un produit de matrices inversibles est inversible donc :

$$A \text{ inversible} \implies EA \text{ inversible} \implies E^{-1}EA \text{ inversible}$$

Ceci montre que A est inversible si et seulement si EA est inversible.

(iii) Soit $AX = B$ l'écriture matricielle d'un système linéaire S , et E une matrice élémentaire. Comme E est inversible alors :

$$AX = B \iff EAX = EB$$

Donc l'opération élémentaire de matrice E donne un système linéaire équivalent au système S . □

Théorème. Soit A une matrice carrée de taille (n, n) . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) A est inversible
- (ii) Pour toute matrice-colonne à n lignes B , le système $AX = B$ admet une unique solution.
- (iii) Pour toute matrice-colonne à n lignes B , le système $AX = B$ admet au moins une solution.
- (iv) $A \underset{L}{\sim} I_n$

Démonstration.

(i) \implies (ii) : si A est inversible alors le système $AX = B$ est de Cramer donc il admet une et une seule solution.

(ii) \implies (iii) est évident.

(iii) \implies (iv) : Soit R une matrice échelonnée réduite équivalente par lignes à A , et E un produit de matrices élémentaires telle que $A = ER$.

On raisonne par contraposée, en supposant que R n'est pas l'identité.

Alors R est carrée et échelonnée réduite mais n'est pas l'identité, donc sa dernière ligne ne contient que des 0. Notons B' est la matrice-colonne ne contenant que des 0 sauf un 1 en dernière ligne. Alors Le système $RX = B'$ n'a pas de solution.

Comme E est inversible alors $RX = B'$ équivaut à $AX = EB'$, puis à $AX = B$ si on note $B = EB'$. Ainsi on obtient une matrice-colonne B telle que le système $AX = B$ n'admet pas de solution, et l'hypothèse (iii) est fausse.

Par contraposée, si l'hypothèse (iii) est valide alors $R = I_n$, i.e., $A \underset{L}{\sim} I_n$.

(iv) \implies (i) : Si $A \underset{L}{\sim} I_n$, alors il existe une matrice E produit de matrices élémentaires tel que $A = EI_n$. Ainsi $A = E$, et comme E est inversible alors A est inversible.

Finalement on a bien démontré que les propositions (i) à (iv) sont équivalentes. \square

Corollaire. Soit S un système de n équations à p inconnues, et r le nombre de pivots que l'on obtient par l'algorithme du pivot de Gauss.

Alors le système S est de Cramer si et seulement si $n = p = r$.

Démonstration. Soit $AX = B$ l'écriture matricielle du système S .

Si ce système est de Cramer alors sa matrice est inversible donc elle est carrée, i.e., $n = p$.

On rappelle que le nombre d'inconnues secondaires est $p - r$. Si le système est de Cramer alors il ne peut avoir d'inconnue secondaire donc $r = p$.

Réciproquement, si $n = p = r$ alors le système admet une et une seule solution, donc A est inversible d'après le théorème ci-dessus. \square

Théorème. Soit A une matrice carrée de taille (n, n) .

S'il existe une matrice C telle que $AC = I_n$, alors A est inversible et C est son inverse, donc $CA = I_n$.

S'il existe une matrice D telle que $DA = I_n$ alors A est inversible et D est son inverse, donc $AD = I_n$.

Remarque.

(i) Ainsi dans le cas d'une matrice carrée, il suffit de vérifier $AB = I_n$ et non $BA = I_n$ pour pouvoir affirmer que A est inversible et que son inverse est B .

(ii) Attention : ceci n'est valable que pour une matrice carrée.

Exemple 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

C. Pratique

Méthode. Soit A une matrice carrée. On souhaite déterminer si elle est inversible, et si c'est le cas calculer sa matrice inverse.

On écrit $AA' = I_n$ où A' est une matrice carrée non explicitée. Par opérations sur les lignes on obtient des égalités équivalentes. Si A est inversible alors on aboutit par l'algorithme du pivot de Gauss à $A' = A^{-1}$.

En effet, l'algorithme du pivot de Gauss consiste à multiplier à gauche par un produit de matrices élémentaires, jusqu'à arriver à une matrice échelonnée réduite par lignes R . Si $A = ER$ avec E produit de matrices élémentaires alors $AA' = I_n$ donne $RA' = E^{-1}$.

Si A n'est pas inversible alors on obtient une contradiction, car la dernière ligne de la matrice R est nulle.

Si A est inversible alors $R = I_n$, donc $A = E$, puis $A' = A^{-1}$.

Exemple 11. Inverser $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ puis $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Méthode 2. Une autre possibilité consiste à résoudre le système $AX = Y$ où X et Y sont deux matrices inconnues. Effet, si A est inversible alors :

$$AX = Y \iff X = A^{-1}Y$$

Exemple 12. Calcul de l'inverse des matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On utilise le lemme suivant :

Lemme. Soit A et B deux matrices carrées de tailles (n, n) . Si pour toutes matrices colonnes X et Y à n lignes l'implication suivante est vraie :

$$AX = Y \implies X = BY$$

alors A est inversible et B est son inverse.

Démonstration. Si X est la matrice colonne E_i ne contenant que des zéros sauf un 1 en ligne i , alors AE_i est la colonne i de A , que l'on note C_i . Comme $AE_i = C_i$ alors $E_i = BC_i$. Mais les matrices colonnes BC_i sont les colonnes de la matrice BA , alors que les E_i sont les colonnes de la matrice identité. On en déduit $BA = I_n$. Comme les matrices A et B sont carrées, par théorème A est inversible et B est son inverse. \square

▷ **Exercices 9, 10.**

D. Cas $n = 2$

Proposition. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Dans ce cas :

Corollaire. Le système $S : \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$ est de Cramer si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Définition. Le réel $ad - bc$ est appelé déterminant de la matrice A , ou du système S .

On note :

Démonstration.

Proposition (Formules de Cramer pour $n = 2$).

Soit $S : \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$ un système de Cramer. Ses solutions sont :

Démonstration.

Exemple 13. Résoudre : $\begin{cases} 3x + 4y = 3 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$

▷ **Exercice 11.**