Feuille de T. D. B5
Matrices

Exercices de cours

1 Calculer AB et BA pour :

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 10 & 5 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 20 & -2 \\ 5 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

2 Soit : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$

Calculer A^2, A^3, puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 On pose :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Vérifier que : $(AB)C = A(BC)$

4 Soit A une matrice de taille (m, n), dont les colonnes sont notées $C_1, \dots, C_n$.

Pour tout $k = 1, \dots, n$ on note E_k la colonne k de la matrice identité I_n.

a. En utilisant la définition de la multiplication matricielle, calculer le produit AE_k pour tout $k = 1, \dots, n$.

b. Soit X une matrice colonne à n lignes.
Démontrer que AX est combinaison linéaire des colonnes de A.

5 Calculer le produit $E_{ij}E_{kl}$ pour tous entiers i, j, k, ℓ compris entre 1 et n.

L'exprimer à l'aide du symbole de Kronecker.

6 Exprimer les deux matrices suivantes comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7 Soit : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

a. Calculer A^2 et A^3.

b. Démontrer qu'il existe deux matrices B et C telles que $I_2 = B + C$ et $A = 2B + 3C$ et donner ces matrices.

c. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = 2^n B + 3^n C$.

8 Calculer les puissances n-èmes de :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

9 Résoudre les systèmes :

$S_1 : \begin{cases} y + z = 13 \\ x + z = 1 \\ x + y = 4 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 4y + 3z = 7 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$

10 Résoudre les systèmes :

$S_3 : \begin{cases} 7x - 5y = 5 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \qquad S_4 : \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 5x - y = 4 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$

$S_5 : \begin{cases} -5x + 4y - 3z = -1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$

11 Soit λ un paramètre. Résoudre les systèmes :

$S_6 : \begin{cases} x + 3y = 1 \\ \lambda x + y = 0 \end{cases}$

$S_7 : \begin{cases} \lambda x + 2y - z = 0 \\ 2x + (\lambda - 3)y + 2z = \lambda - 4 \\ -x + 2y + \lambda z = 2 \end{cases}$

12 Résoudre les systèmes :

$S_8 : \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases}$

$S_9 : \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ x + 3y + 6z + 10t = 15 \end{cases}$

$S_{10} : \begin{cases} x + y - z - 2t = -2 \\ 2x + 2y + 2z + t = 6 \end{cases}$

13 Résoudre les systèmes :

$S_{11} : \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ x - 4y = -11 \end{cases} \qquad S_{12} : \begin{cases} 7x - 2y = -4 \\ 5x + 8y = 5 \end{cases}$

$S_{13} : \begin{cases} \lambda x + 2y = 4 \\ 3x + (\lambda + 1)y = 3\lambda \end{cases}$

(14) Inverser les matrices :

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&5\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}7&0\\6&5\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}4&-2\\3&-5\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&4\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}3&0&1\\2&-1&0\\0&2&3\end{pmatrix}$$

(15) En utilisant un système linéaire inverser la matrice :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

Travaux dirigés

1 On pose :

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-1\end{pmatrix}\text{ et }B=\begin{pmatrix}3&2\\3&1\\-1&-1\end{pmatrix}$$

Calculer les matrices AB, BA, ABA, BAB, $(AB)^2$, $(BA)^2$, $(AB)^2+4AB$ et $(BA)^3+4(BA)^2+3BA$.

2 On pose :

$$A=\begin{pmatrix}18&9&-12&-15\\-12&-6&8&10\\24&12&-16&-20\\36&18&-24&-30\end{pmatrix}$$

a. Donner une matrice-colonne U et un matrice-ligne V telles que $A=UV$.

b. Calculer A^n pour tout entier positif n.

c. Démontrer que A n'est pas inversible.

3 Soit A et B deux matrices symétriques de même taille. Démontrer que AB est symétrique si et seulement si $AB=BA$.

4 Soit M une matrice réelle. Démontrer que :

a. $M\,{}^tM$ est symétrique.

b. Les termes diagonaux de $M\,{}^tM$ sont positifs.

c. $M\,{}^tM$ est nulle si et seulement si M est nulle.

5 Soit D une matrice diagonale de taille (n,n) dont tous les termes diagonaux sont distincts. Soit A une matrice de taille (n,n) telle que $AD=DA$. Démontrer que A est diagonale.

6 Une matrice stochastique est une matrice réelle carrée telle que :

(i) tous ses termes sont positifs,

(ii) la somme de chacune de ses lignes vaut 1.

Démontrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

7 Calculer les puissances n-èmes des matrices suivantes.

$$A=\begin{pmatrix}6&-5\\7&-6\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}\lambda&\mu\\\lambda&\mu\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}2&-4&5\\0&2&-4\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\qquad F=\begin{pmatrix}7&4&4\\4&7&4\\4&4&7\end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix}0&a&b&c\\0&0&d&e\\0&0&0&f\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad H=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

8 Soit $j=e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j&j^2\\1&j^2&j\end{pmatrix}$$

Calculer A^4.

En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

9 On note :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\4&1&-2\\-6&3&6\end{pmatrix}$$

Démontrer qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2=\alpha A+\beta I_3$. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

10 Soit t un scalaire, et A la matrice de taille (n,n) de coefficients :

$$a_{ij}=\begin{cases}t & \text{si } i=j\\ 1 & \text{si } i\neq j\end{cases}$$

a. Démontrer qu'il existe deux scalaires α et β tels que $A^2=\alpha A+\beta I_n$, et exprimer ces scalaires en fonction de t.

b. Déterminer pour quelles valeurs de t la matrice A est inversible, et calculer alors A^{-1}.

11 Soit A une matrice carrée de taille (n,n) telle que $A^5+A=I_n$.

Démontrer que $B=A^2+A+I_n$ est inversible et donner sa matrice inverse.

12 Soit A une matrice carrée de taille (n,n).

On suppose que A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $A^p=0$.

a. Justifier que A n'est pas inversible.

b. Démontrer que I_n-A est inversible et donner son inverse.

13 Soit A et B deux matrices de taille (n,n) telles que $AB=A+I_n$.

Démontrer que A et B commutent.

14 Résoudre les systèmes suivants.

$$S_1 : \begin{cases} 2x + 9y = 2 \\ x + 7y = -4 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 11x + 6y = 1 \end{cases} \qquad S_3 : \begin{cases} 237x + 233y = 2390 \\ 233x + 237y = 2310 \end{cases}$$

$$S_4 : \begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 7x - y = 3 \end{cases} \qquad S_5 : \begin{cases} 5x - 4y = 7 \\ 3x + 7y = 23 \\ 6x - y = 16 \end{cases} \qquad S_6 : \begin{cases} 51x + 59y = 7 \\ 39x + 51y = 3 \end{cases}$$

$$S_7 : \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + y + 5z = 8 \end{cases} \qquad S_8 : \begin{cases} 5x - 6y = a \\ 6x - 7y = a + 1 \end{cases} \qquad S_9 : \begin{cases} 2x + 3y + 3z = 4 \\ 3x + 2y + 3z = 7 \\ 3x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$S_{10} : \begin{cases} 3x + 4y - z = 4 \\ x - 2y + 2z = 3 \\ 5x + 3z = 9 \end{cases} \qquad S_{11} : \begin{cases} x + 2z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 2y - 4z = 2 \end{cases} \qquad S_{12} : \begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ 5x - 2y + 2z = 1 \\ -3x + y + z = 2 \end{cases}$$

15 Résoudre les systèmes suivants.

$$S_1 : \begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ x + 3y + 6z + 10t = 15 \\ x + 4y + 10z + 19t = 31 \end{cases}$$

$$S_4 : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

16 Résoudre les systèmes suivants, éventuellement en discutant selon la valeur des paramètres a, b, λ.

$$S_1 : \begin{cases} \lambda x - y + 2z = \lambda^2 - 3 \\ 3x + 2y + \lambda z = 4\lambda \\ 2x + z = 2\lambda + 1 \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} x + 2ay + z = 3 \\ y + az = 2 \\ x - z = -1 \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \\ x + 2y + az = b \end{cases}$$

17 On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 13 \\ -4 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

a. Justifier que A est inversible.

b. Calculer AB et en déduire que B n'est pas inversible.

18 On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 22 & -9 \\ -4 & -7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

a. Calculer le produit AB. Justifier que A et AB sont inversibles, et en déduire que B est inversible.

b. Calculer l'inverse de AB, puis celui de B.

19 Déterminer si chacune des matrices suivantes est inversible, éventuellement en discutant selon son paramètre, et inverser celles qui sont inversibles.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 2\lambda + 1 & \lambda + 1 \\ 2\lambda + 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \qquad A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{10} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ i & 1 & i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix} \qquad A_{12} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$A_{15} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -5 & 7 \end{pmatrix} \qquad A_{16} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & a & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_{17} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 5 & 8 & -2 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \qquad A_{18} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda & \lambda^2 & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

20 Démontrer qu'une matrice antisymétrique de taille $(3, 3)$ n'est pas inversible.

21 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et A la matrice de taille (n,n) dont les coefficients sont définis par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 1 & \text{si } (i,j) = (n,1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $B = I_n - A$.

a. Démontrer que B n'est pas inversible.

b. Démontrer que A est inversible et donner son inverse.

22 Soit n un entier naturel non-nul et a un complexe. On note S_a le système :

$$\begin{cases} x_1 & - ax_2 & = 1 \\ x_2 & - ax_3 & = 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & - ax_n & = 1 \\ x_n & - ax_1 & = 1 \end{cases}$$

a. À quelle condition ce système est-il de Cramer ?

b. Résoudre le système dans ce cas.

c. Dans le cas où le système n'est pas de Cramer, résoudre le système homogène associé, puis compléter la résolution.

23 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 15 & -9 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2.

b. Démontrer que P est inversible et calculer son inverse.

c. Calculer $B = P^{-1}AP$.

d. Exprimer A^n en fonction de P, B et n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e. Calculer B^n puis A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

24 Reproduire l'exercice précédent avec :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -25 \\ 4 & -9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

25 Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = 4u_n + 3v_n \end{cases}$$

On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

a. Déterminer les trois premiers termes des suites (u_n) et (v_n).

b. Donner une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $X_{n+1} = AX_n$.

En déduire une expression de X_n en fonction de A, n et X_0.

c. Démontrer qu'il existe deux matrices A_1 et A_2 telles que :

$$\forall n \in \{0,1\} \qquad A^n = 5^n A_1 + A_2$$

d. Démontrer que la relation donnée ci-dessus est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e. Exprimer les termes généraux des suites (u_n) et (v_n).

26 Cet exercice nécessite la connaissance des suites double-récurrentes linéaires.

Soit A une matrice carrée inversible de taille (n,n) satisfaisant $A + A^{-1} = I_n$.

Calculer $A^p + A^{-p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.