

**Feuille de T. D. B5**  
**Matrices**

**Exercices de cours**

① Calculer  $AB$  et  $BA$  pour :

a.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 10 & 5 & -5 \end{pmatrix}$      $B = \begin{pmatrix} 20 & -2 \\ 5 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

b.  $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$      $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

② Soit :  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$

Calculer  $A^2$ ,  $A^3$ , puis  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

③ On pose :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$      $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$      $C = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Vérifier que :  $(AB)C = A(BC)$

④ Calculer le produit  $E_{ij}E_{kl}$  pour tous entiers  $i, j, k, \ell$ .

On suppose que  $E_{ij} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$  et  $E_{kl} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ , et on utilisera le symbole de Kronecker.

⑤ Résoudre les systèmes :

$S_1 : \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases}$

$S_2 : \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ x + 3y + 6z + 10t = 15 \end{cases}$

$S_3 : \begin{cases} x + y - z - 2t = -2 \\ 2x + 2y + 2z + t = 6 \end{cases}$

⑥ Exprimer les deux matrices suivantes comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique :

$M = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$      $N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

⑦ Soit :  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

a. Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .

b. Démontrer qu'il existe deux matrices  $B$  et  $C$  telles que  $I_2 = B + C$  et  $A = 2B + 3C$  et donner ces matrices.

c. Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = 2^n B + 3^n C$ .

⑧ Calculer les puissances  $n$ -èmes de :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$      $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

⑨ En utilisant un système linéaire inverser la matrice :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

⑩ Inverser les matrices :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$      $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$      $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   
 $D = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$      $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$      $F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

⑪ Résoudre les systèmes :

$S_4 : \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ x - 4y = -11 \end{cases}$      $S_5 : \begin{cases} 7x - 2y = -4 \\ 5x + 8y = 5 \end{cases}$

$S_6 : \begin{cases} \lambda x + 2y = 4 \\ 3x + (\lambda + 1)y = 3\lambda \end{cases}$

**Travaux dirigés**

① On pose :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculer les matrices  $AB, BA, ABA, BAB, (AB)^2, (BA)^2, (AB)^2 + 4AB$  et  $(BA)^3 + 4(BA)^2 + 3BA$ .

② On pose :

$A = \begin{pmatrix} 18 & 9 & -12 & -15 \\ -12 & -6 & 8 & 10 \\ 24 & 12 & -16 & -20 \\ 36 & 18 & -24 & -30 \end{pmatrix}$

a. Donner une matrice-colonne  $U$  et un matrice-ligne  $V$  telles que  $A = UV$ .

b. Calculer  $A^n$  pour tout entier positif  $n$ .

c. Démontrer que  $A$  n'est pas inversible.

③ Soit  $A$  et  $B$  deux matrices symétriques de même taille. Démontrer que  $AB$  est symétrique si et seulement si  $AB = BA$ .

**4** Soit  $D$  une matrice diagonale de taille  $(n, n)$  dont tous les termes diagonaux sont distincts. Soit  $A$  une matrice de taille  $(n, n)$  telle que  $AD = DA$ . Démontrer que  $A$  est diagonale.

**5** Soit  $M$  une matrice réelle. Démontrer que :

- a.  $M^t M$  est symétrique.
- b. Les termes diagonaux de  $M^t M$  sont positifs.
- c.  $M$  est nulle si et seulement si les termes diagonaux de  $M^t M$  sont nuls.

**6** Une matrice stochastique est une matrice réelle carrée telle que :

- (i) tous ses termes sont positifs,
- (ii) la somme de chacune de ses lignes vaut 1.

Démontrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

**7** Calculer les puissances  $n$ -èmes des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**8** Soit  $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$  et :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

Calculer  $A^4$ .

En déduire que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ .

**9** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 15 & -9 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ .

- a. Calculer  $A^2$ .
- b. Démontrer que  $P$  est inversible et calculer son inverse.
- c. Calculer  $B = P^{-1}AP$ .
- d. Exprimer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n$  en fonction de  $P$ ,  $B$  et  $n$ . Expliciter ensuite  $A^n$ .

**10** Reproduire l'exercice précédent avec :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -25 \\ 4 & -9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**11** Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites définies par  $u_0 = v_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = 4u_n + 3v_n \end{cases}$$

On note  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ .

- a. Déterminer les trois premiers termes des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .
- b. Donner une matrice  $A$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on ait  $X_{n+1} = AX_n$ .  
En déduire une expression de  $X_n$  en fonction de  $A$ ,  $n$  et  $X_0$ .
- c. Démontrer qu'il existe deux matrices  $A_1$  et  $A_2$  telles que :  
$$\forall n \in \{0, 1\} \quad A^n = 5^n A_1 + A_2$$
- d. Démontrer que la relation donnée ci-dessus est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- e. Exprimer les termes généraux des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

**12** On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 13 \\ -4 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- a. Justifier que  $A$  est inversible.
- b. Calculer  $AB$  et en déduire que  $B$  n'est pas inversible.

**13** On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 22 & -9 \\ -4 & -7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- a. Calculer le produit  $AB$ . Justifier que  $A$  et  $AB$  sont inversibles, et en déduire que  $B$  est inversible.
- b. Calculer l'inverse de  $AB$ , puis celui de  $B$ .

**14** On note :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Démontrer qu'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $A^2 = \alpha A + \beta I_3$ . En déduire que  $A$  est inversible et donner son inverse.

**15** Soit  $t$  un scalaire, et  $A$  la matrice de taille  $(n, n)$  de coefficients :

$$a_{ij} = \begin{cases} t & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

- a. Démontrer qu'il existe deux scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $A^2 = \alpha A + \beta I_n$ , et exprimer ces scalaires en fonction de  $t$ .
- b. Déterminer pour quelles valeurs de  $t$  la matrice  $A$  est inversible, et calculer alors  $A^{-1}$ .

**16** Déterminer si chacune des matrices suivantes est inversible, éventuellement en discutant selon son paramètre, et inverser celles qui sont inversibles.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & A_2 &= \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \\
 A_3 &= \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} & A_4 &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \\
 A_5 &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} & A_6 &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\
 A_7 &= \begin{pmatrix} 2\lambda + 1 & \lambda + 1 \\ 2\lambda + 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} & A_8 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 A_9 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & A_{10} &= \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ i & 1 & i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix} \\
 A_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix} & A_{12} &= \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 A_{13} &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} & A_{14} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & \lambda \end{pmatrix} \\
 A_{15} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -5 & 7 \end{pmatrix} & A_{16} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & a & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
 A_{17} &= \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 5 & 8 & -2 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix} & A_{18} &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda & \lambda^2 & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

**17** Démontrer qu'une matrice antisymétrique de taille  $(3, 3)$  n'est pas inversible.

**18** Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $(n, n)$  telle que  $A^5 + A = I_n$ .

Démontrer que  $B = A^2 + A + I_n$  est inversible et donner sa matrice inverse.

**19** Résoudre les systèmes suivants.

$$\begin{aligned}
 S_1 &: \begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases} \\
 S_2 &: \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases} \\
 S_3 &: \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ x + 3y + 6z + 10t = 15 \\ x + 4y + 10z + 19t = 31 \end{cases} \\
 S_4 &: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

**20** Résoudre les systèmes suivants, éventuellement en discutant selon la valeur des paramètres  $a, b, \lambda$ .

$$\begin{aligned}
 S_1 &: \begin{cases} \lambda x - y + 2z = \lambda^2 - 3 \\ 3x + 2y + \lambda z = 4\lambda \\ 2x + z = 2\lambda + 1 \end{cases} \\
 S_2 &: \begin{cases} x + 2ay + z = 3 \\ y + az = 2 \\ x - z = -1 \end{cases} \\
 S_3 &: \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \\ x + 2y + az = b \end{cases}
 \end{aligned}$$

**21** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a \in \mathbb{C}$  et :

$$S_a : \begin{cases} x_1 - ax_2 = 1 \\ x_2 - ax_3 = 1 \\ \vdots \\ x_{n-1} - ax_n = 1 \\ x_n - ax_1 = 1 \end{cases}$$

- À quelle condition ce système est-il de Cramer ?
- Résoudre le système dans ce cas.
- Dans le cas où le système n'est pas de Cramer, résoudre le système homogène associé, puis compléter la résolution.

**22** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $A$  la matrice de taille  $(n, n)$  dont les coefficients sont définis par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1 \\ 1 & \text{si } (i, j) = (n, 1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $B = I_n - A$ .

- Démontrer que  $B$  n'est pas inversible.
- Démontrer que  $A$  est inversible et donner son inverse.

**23** Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $(n, n)$ .

On suppose que  $A$  est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $A^p = 0$ .

- Justifier que  $A$  n'est pas inversible.
- Démontrer que  $I_n - A$  est inversible et donner son inverse.

**24** Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de taille  $(n, n)$  telles que  $AB = A + I_n$ .

Démontrer que  $A$  et  $B$  commutent.

**25** Cet exercice nécessite la connaissance des suites double-récurrentes linéaires.

Soit  $A$  une matrice carrée inversible de taille  $(n, n)$  satisfaisant  $A + A^{-1} = I_n$ .

Calculer  $A^p + A^{-p}$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .