TD. B5
Matrices

Exercices de cours

1 Calculer AB et BA pour :

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 10 & 5 & -5 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 20 & -2 \\ 5 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

2 Soit : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$

Calculer A^2, A^3, puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 On pose :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Vérifier que : $\quad (AB)C = A(BC)$

4 Calculer le produit $E_{ij}E_{kl}$ pour tous entiers i, j, k, ℓ.

On suppose que $E_{ij} \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et $E_{k\ell} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, et on utilisera le symbole de Kronecker.

5 Exprimer les deux matrices suivantes comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6 Soit : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

a. Calculer A^2 et A^3.

b. Démontrer qu'il existe deux matrices B et C telles que $I_2 = B + C$ et $A = 2B + 3C$ et donner ces matrices.

c. Démontrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = 2^n B + 3^n C$.

7 Calculer les puissances n-èmes de :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

8 Résoudre les systèmes :

$$S_1 : \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ x + 3y + 6z + 10t = 15 \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} x + y - z - 2t = -2 \\ 2x + 2y + 2z + t = 6 \end{cases}$$

9 En utilisant un système linéaire inverser la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10 Inverser les matrices :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ $\quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

11 Résoudre les systèmes :

$S_4 : \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ x - 4y = -11 \end{cases}$ $\qquad S_5 : \begin{cases} 7x - 2y = -4 \\ 5x + 8y = 5 \end{cases}$

$S_6 : \begin{cases} \lambda x + 2y = 4 \\ 3x + (\lambda + 1)y = 3\lambda \end{cases}$

Travaux dirigés

1 On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer les matrices AB, BA, ABA, BAB, $(AB)^2$, $(BA)^2$, $(AB)^2 + 4AB$ et $(BA)^3 + 4(BA)^2 + 3BA$.

2 On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 9 & -12 & -15 \\ -12 & -6 & 8 & 10 \\ 24 & 12 & -16 & -20 \\ 36 & 18 & -24 & -30 \end{pmatrix}$$

a. Donner une matrice-colonne U et un matrice-ligne V telles que $A = UV$.

b. Calculer A^n pour tout entier positif n.

c. Démontrer que A n'est pas inversible.

3 Soit A et B deux matrices symétriques de même taille. Démontrer que AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$.

4 Soit D une matrice diagonale de taille (n, n) dont tous les termes diagonaux sont distincts. Soit A une matrice de taille (n, n) telle que $AD = DA$. Démontrer que A est diagonale.

5 Soit M une matrice réelle. Démontrer que :

a. $M\,{}^tM$ est symétrique.

b. Les termes diagonaux de $M\,{}^tM$ sont positifs.

c. M est nulle si et seulement si les termes diagonaux de $M\,{}^tM$ sont nuls.

6 Une matrice stochastique est une matrice réelle carrée telle que :

- tous ses termes sont positifs,
- la somme de chacune de ses lignes vaut 1.

Démontrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

7 Calculer les puissances n-èmes des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8 Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = 4u_n + 3v_n \end{cases}$$

On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

a. Donner une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $X_{n+1} = AX_n$.

En déduire une expression de X_n en fonction de A, n et X_0.

b. Démontrer qu'il existe deux matrices A_1 et A_2 telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad A^n = 5^n A_1 + A_2$$

c. En déduire les termes généraux des suites (u_n) et (v_n).

9 Soit $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

Calculer A^4.

En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

10 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 15 & -9 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que P est inversible et calculer son inverse.

b. Calculer $B = P^{-1}AP$.

c. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de P, B et n. Expliciter ensuite A^n.

11 Reproduire l'exercice précédent avec :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -25 \\ 4 & -9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

12 On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 13 \\ -4 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

a. Justifier que A est inversible.

b. Calculer AB et en déduire que B n'est pas inversible.

13 On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 12 & 22 & -9 \\ -4 & -7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

a. Calculer le produit AB. Justifier que A et AB sont inversibles, et en déduire que B est inversible.

b. Calculer l'inverse de AB, puis celui de B.

14 On note :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Démontrer qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

15 Soit t un scalaire, et A la matrice de taille (n, n) de coefficients :

$$a_{ij} = \begin{cases} t & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

a. Démontrer qu'il existe deux scalaires α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_n$, et exprimer ces scalaires en fonction de t.

b. Déterminer pour quelles valeurs de t la matrice A est inversible, et calculer alors A^{-1}.

16 Soit A une matrice carrée de taille (n,n) telle que $A^5 + A = I_n$.

Démontrer que $B = A^2 + A + I_n$ est inversible et donner sa matrice inverse.

17 Soit A une matrice carrée de taille (n,n).

On suppose que A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$.

a. Justifier que A n'est pas inversible.

b. Démontrer que $I_n - A$ est inversible et donner son inverse.

18 Déterminer si chacune des matrices suivantes est inversible, éventuellement en discutant selon son paramètre, et inverser celles qui sont inversibles.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 2\lambda+1 & \lambda+1 \\ 2\lambda+2 & \lambda+2 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ i & 1 & i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix} \qquad A_8 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_9 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -5 & 7 \end{pmatrix} \qquad A_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & a & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda & \lambda^2 & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

19 Démontrer qu'une matrice antisymétrique de taille $(3,3)$ n'est pas inversible.

20 Résoudre les systèmes suivants.

$$S_1 : \begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ x + 3y + 6z + 10t = 15 \\ x + 4y + 10z + 19t = 31 \end{cases}$$

21 Résoudre les systèmes suivants, éventuellement en discutant selon la valeur des paramètres a, b, λ.

$$S_1 : \begin{cases} x + 2ay + z = 3 \\ y + az = 2 \\ x - z = -1 \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \\ x + 2y + az = b \end{cases}$$

22 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et A la matrice de taille (n,n) dont les coefficients sont définis par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 1 & \text{si } (i,j) = (n,1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $B = I_n - A$.

a. Démontrer que B n'est pas inversible.

b. Démontrer que A est inversible et donner son inverse.

23 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$ et :

$$S_a : \begin{cases} x_1 - ax_2 = 1 \\ x_2 - ax_3 = 1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_{n-1} - ax_n = 1 \\ x_n - ax_1 = 1 \end{cases}$$

a. À quelle condition ce système est-il de Cramer ?

b. Résoudre le système dans ce cas.

c. Dans le cas où le système n'est pas de Cramer, résoudre le système homogène associé, puis compléter la résolution.

Alphabet grec ancien

alpha	α	A
bêta	β	B
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
epsilon	ε, ϵ	E
zêta	ζ	Z
êta	η	H
thêta	θ, ϑ	Θ
iota	ι	I
kappa	κ	K
lambda	λ	Λ
mu	μ	M

nu	ν	N
xi, ksi	ξ	Ξ
omicron	o	O
pi	π, ϖ	Π
rho	ρ, ϱ	P
sigma	σ, ς	Σ
tau	τ	T
upsilon	υ	Υ
phi	φ	Φ
khi	χ	X
psi	ψ	Ψ
omega	ω	Ω