Lycée Bellevue – Toulouse
MPSI – Mathématiques

pour le 18 décembre 2024

Devoir à la Maison n°6

Irrationnalité du nombre d'Euler

On rappelle la définition suivante :

> **Définition.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite et* ℓ *un réel. On dit que* (u_n) *converge vers* ℓ *si :*
>
> $$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^t \,\mathrm{d}t$.

1. (a) Encadrer la fonction $t \mapsto e^t$ sur l'intervalle $[0,1]$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$$

   (b) Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

2. (a) Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$

   (b) Calculer I_0, I_1, I_2 et I_3.

   (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe deux entiers a_n et b_n tels que $I_n = a_n e + b_n$.

3. (a) On suppose qu'il existe deux entiers naturels p et q tels que $e = \frac{p}{q}$.
   Justifier que la suite $(pa_n + qb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et en déduire :

$$\exists n \in \mathbb{N} \qquad -\frac{1}{2} \leqslant pa_n + qb_n \leqslant \frac{1}{2}.$$

   (b) Démontrer que e est irrationnel.