Programme de colles
Semaine 12
du 15 au 19 décembre 2025

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieur.
2. Toute matrice carrée s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
3. Si A et B sont inversibles alors AB est inversible.
4. Lemme : Une matrice carrée A est inversible ssi pour toute matrice colonne Y le système $AX = Y$ admet une et une seule solution.
5. Une matrice de taille $(2, 2)$ est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul. Formule pour son inverse dans ce cas.

Exercices

Chapitre B4. Arithmétique

I. Entiers
II. PGCD et PPCM
III. Nombres premiers
IV. Congruence
V. Rationnels

Chapitre A7. Équations différentielles

I. Équations linéaires de premier ordre
II. Équations linéaires du second ordre

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitres A7 (Équations différentielles) et B5 (Matrices).

Chapitre B4. Arithmétique

I. Entiers

Diviseur, multiple. Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

II. PGCD et PPCM

PGCD, algorithme d'Euclide. Relation de Bézout, calcul des coefficients.

PPCM. Formule $(a \wedge b)(a \vee b) = ab$.

Entiers premiers entre eux, théorème de Bézout, lemme de Gauss.

Généralisation à plusieurs entiers.

III. Nombres premiers

Nombres premiers, en nombre infini. Décomposition en produit de facteurs premiers.

Valuations p-adiques. Caractérisation de la divisibilité, formules pour le PGCD et le PPCM.

IV. Congruence

Définition, compatibilité avec l'addition et la multiplication. Petit théorème de Fermat.

V. Rationnels

Définition, forme irréductible. Stabilité par somme, produit, quotient. L'écriture décimale d'un rationnel présente une ration (sans démonstration). Irrationnalité de $\sqrt{2}$.

Nombres décimaux ($\mathbb{D}$).

Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Chapitre A7. Équations différentielles

I. Équations linéaires de premier ordre

Uniquement du type $y' - a(t)y = b(t)$ sur un intervalle, ou s'y ramenant. Les solutions sont les sommes d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène associée.

Équation homogène : par théorème, les solutions sur un intervalle de $y' - a(t)y = 0$ sont les fonctions $y(t) = \lambda e^{A(t)}$ où A est une primitive de a et λ est une constante.

Solution particulière : principe de superposition, recherche de solutions polynomiales, trigonométrique, variation de la constante. Pas de problème de recollement.

Existence et unicité de la solution du problème de Cauchy.

II. Équations linéaires du second ordre

Uniquement du type $ay'' + by' + cy = d(t)$ avec $d(t)$ exponentielle, trigonométrique, ou polynomiale.

Équations homogène : on utilise l'équation caractéristique associée $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

Solution particulière : Pour un second membre polynomial on cherche une solution polynomiale. Pour un second membre de la forme $Ke^{\mu t}$ on cherche une solution de la forme $y_1(t) = Lt^m e^{\mu t}$ où L est une constante et m est l'ordre de multiplicité de μ comme racine de l'équation caractéristique. Pour un second membre de la forme $K \cos \omega t$ et $K \sin \omega t$ on se ramène à $Ke^{i\omega t}$.

Existence et unicité de la solution du problème de Cauchy.