Programme de colles
Semaine 12
du 16 au 20 décembre 2024

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Calcul du terme général d'une suite arithmético-géométrique ou double-récurrente donnée.

2. Définition et caractérisation à l'aide des quantificateurs de la borne supérieure.

3. Toute suite convergente est bornée.

4. Si une suite converge vers $\ell > 0$ alors elle est positive à partir d'un certain rang.

5. Si (u_n) et (v_n) convergent vers 0 alors $(u_n + v_n)$ converge vers 0.

6. Si (u_n) tend vers $\pm\infty$ alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers 0.

Exercices

Chapitre A5. Primitives

I. Intégrales et primitives
II. Calculs de primitives

Chapitre A6. Équations différentielles

I. Équations linéaires de premier ordre
II. Équations linéaires du second ordre

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitre B5 (Matrices).

Chapitre A5. Primitives

I. Intégrales et primitives

Intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$: c'est l'aire sous la courbe. Relation de Chasles, linéarité de l'intégrale, croissance de l'intégrale (sans la positivité).

Primitive : définition, deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante. Théorème fondamental : si f est continue sur un intervalle I, et $a \in I$ alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f. Si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$. Corollaire : toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive.

II. Calculs de primitives

Primitives usuelles. Linéarisation d'expressions trigonométriques (y compris hyperboliques), utilisation des complexes ($e^{ax}\cos(bx)$ par exemple), décomposition de polynômes ($\frac{x+2}{x+1}$ par exemple), fractions rationnelles du type $\frac{dx+e}{ax^2+bx+c}$, intégration par parties, changement de variable.

Chapitre A6. Équations différentielles

I. Équations linéaires de premier ordre

Uniquement du type $y' - a(t)y = b(t)$ sur un intervalle, ou s'y ramenant. Les solutions sont les sommes d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène associée.

Équation homogène : par théorème, les solutions sur un intervalle de $y' - a(t)y = 0$ sont les fonctions $y(t) = \lambda e^{A(t)}$ où A est une primitive de a et λ est une constante.

Solution particulière : principe de superposition, recherche de solutions polynomiales, trigonométrique, variation de la constante. Pas de problème de recollement.

Existence et unicité de la solution du problème de Cauchy.

II. Équations linéaires du second ordre

Uniquement du type $ay'' + by' + cy = d(t)$ avec $d(t)$ exponentielle, trigonométrique, ou polynomiale.

Équations homogène : on utilise l'équation caractéristique associée $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

Solution particulière : Pour un second membre polynomial on cherche une solution polynomiale. Pour un second membre de la forme $Ke^{\mu t}$ on cherche une solution de la forme $y_1(t) = Lt^m e^{\mu t}$ où L est une constante et m est l'ordre de multiplicité de μ comme racine de l'équation caractéristique. Pour un second membre de la forme $K\cos\omega t$ et $K\sin\omega t$ on se ramène à $Ke^{i\omega t}$.

Existence et unicité de la solution du problème de Cauchy.