Corrigé du Devoir à la Maison n°6

Irrationnalité du nombre d'Euler

1. (a) Comme la fonction exponentielle est croissante sur $[0,1]$ alors :

$$\forall t \in [0,1] \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 \leqslant e^t \leqslant e$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0,1]$, comme t est positif alors t^n est positif et donc :

$$\forall t \in [0,1] \qquad t^n \leqslant t^n e^t \leqslant t^n e$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n e^t \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n e \,\mathrm{d}t$$

On calcule :

$$\int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 t^n e \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}e}{n+1}\right]_0^1 = \frac{e}{n+1}$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$$

(b) Les suites $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{e}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0, donc d'après le théorème d'encadrement la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 t^{n+1} e^t \,\mathrm{d}t$.

On pose $u(t) = t^{n+1}$ et $v(t) = e^t$. Alors ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $u'(t) = (n+1)t^n$ et $v'(t) = e^t$. Par intégration par parties :

$$I_{n+1} = \Big[t^{n+1} e^t\Big]_0^1 - \int_0^1 (n+1) t^n e^t \,\mathrm{d}t$$

Ceci donne :

$$I_{n+1} = e - 0 - (n+1)\int_0^1 t^n e^t \,\mathrm{d}t = e - (n+1) I_n.$$

(b) On calcule $I_0 = \displaystyle\int_0^1 e^t \,\mathrm{d}t = [e^t]_0^1 = e - 1$.

Ensuite, en utilisant le résultat de la question précédente :

$$I_1 = e - I_0 = 1 \qquad I_2 = e - 2I_1 = e - 2 \qquad I_3 = e - 3I_2 = 6 - 2e$$

(c) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : Il existe deux entiers a_n et b_n tels que $I_n = a_n e + b_n$.
On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation. Soit $a_0 = 1$ et $b_0 = -1$. Alors a_0 et b_0 sont entiers, et $I_0 = a_0 e + b_0$ car $I_0 = e - 1$, donc la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors il existe deux entiers a_n et b_n tels que $I_n = a_n e + b_n$.
D'après la propriété démontrée ci-dessus : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
Ceci donne :

$$I_{n+1} = e - (n+1)a_n e - (n+1)b_n = [1 - (n+1)a_n]e - (n+1)b_n$$

Posons $a_{n+1} = 1 - (n+1)a_n$ et $b_{n+1} = -(n+1)b_n$.
Alors $I_{n+1} = a_{n+1}e + b_{n+1}$.
Comme a_n et b_n sont entiers alors a_{n+1} et b_{n+1} sont entiers.
Ceci montre que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
L'hérédité de la propriété $\mathcal{P}_n$ est démontrée.
Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe deux entiers a_n et b_n tels que $I_n = a_n e + b_n$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $I_n = a_n e + b_n$ et on a posé $e = \frac{p}{q}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n = \frac{a_n p + q b_n}{q}$$

Ceci montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad p a_n + q b_n = q I_n$$

Comme la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 alors la suite $(qI_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc la suite $(pa_n + qb_n)$ converge vers 0.
Par définition de la convergence :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |pa_n + qb_n| \leqslant \varepsilon)$$

Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Alors $\varepsilon > 0$ donc :

$$\exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \left(n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |pa_n + qb_n| \leqslant \frac{1}{2}\right)$$

En particulier pour $n = N$, comme $n \geqslant N$ alors $|pa_n + qb_n| \leqslant \frac{1}{2}$, et ainsi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$-\frac{1}{2} \leqslant pa_n + qb_n \leqslant \frac{1}{2}$$

(b) On reprend les notations de la question précédente.
Comme a_n, b_n, p et q sont des entiers alors $pa_n + qb_n$ est un entier.
Or $-\frac{1}{2} \leqslant pa_n + qb_n \leqslant \frac{1}{2}$, donc $pa_n + qb_n = 0$.
Ceci montre que $qI_n = 0$, et donc $I_n = 0$ car q est supposé non-nul (puisque $e = \frac{p}{q}$).
Or on a justifié que $\frac{1}{n+1} \leqslant I_n$, donc ceci est impossible car $0 < \frac{1}{n+1}$.
Cette contradiction montre qu'il n'existe pas d'entiers p et q tels que $e = \frac{p}{q}$, donc e est irrationnel.