Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2025-2026**
MPSI – Mathématiques

Programme de colles
Semaine 13
du 5 au 9 janvier 2026

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. (Question obligatoire) Un développement limité usuel au choix, sans démonstration.
2. Le développement limité en 0 d'une fonction impaire a ses coefficients pairs nuls.
3. Formule de Taylor-Young en 0.
4. Développements limités en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et de $x \mapsto \ln(1+x)$.
5. Développement limité en 0 de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
6. Asymptote en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{2x^2+5}{x+3}$ (ou d'une fonction similaire), position relative de la courbe de la fonction par rapport à cette asymptote.

Exercices

Chapitre A7. Équations différentielles

I. Équations linéaires de premier ordre
II. Équations linéaires du second ordre

Chapitre B5. Matrices

I. Définitions
II. Matrices carrées
III. Systèmes linéaires
IV. Inversion des matrices et systèmes de Cramer

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitres B5 (Matrices) et A8 (Développements limités).

Chapitre A7. Équations différentielles

I. Équations linéaires de premier ordre

Uniquement du type $y' - a(t)y = b(t)$ sur un intervalle, ou s'y ramenant. Les solutions sont les sommes d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène associée.

Équation homogène : par théorème, les solutions sur un intervalle de $y' - a(t)y = 0$ sont les fonctions $y(t) = \lambda e^{A(t)}$ où A est une primitive de a et λ est une constante.

Solution particulière : principe de superposition, recherche de solutions polynomiales, trigonométrique, variation de la constante. Pas de problème de recollement.

Existence et unicité de la solution du problème de Cauchy.

II. Équations linéaires du second ordre

Uniquement du type $ay'' + by' + cy = d(t)$ avec $d(t)$ exponentielle, trigonométrique, ou polynomiale.

Équations homogène : on utilise l'équation caractéristique associée $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

Solution particulière : Pour un second membre polynomial on cherche une solution polynomiale. Pour un second membre de la forme $Ke^{\mu t}$ on cherche une solution de la forme $y_1(t) = Lt^m e^{\mu t}$ où L est une constante et m est l'ordre de multiplicité de μ comme racine de l'équation caractéristique. Pour un second membre de la forme $K \cos \omega t$ et $K \sin \omega t$ on se ramène à $Ke^{i\omega t}$.

Existence et unicité de la solution du problème de Cauchy.

Chapitre B5. Matrices

I. Définitions

Définition. Matrice nulle, matrice-ligne, matrice-colonne. Somme, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires, matrices E_{ij}. Produit, transposition.

II. Matrices carrées

Matrices diagonales, triangulaires. Stabilité par les opérations. Matrices symétriques et antisymétriques. Toute matrice carrée s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Puissances, formule du binôme.

Matrices inversible, notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Produit de deux matrices inversibles, inversibilité de la transposée et de l'inverse d'une matrice. La matrices élémentaires sont inversibles.

Opérations et matrices élémentaires. Inversibilité des matrices élémentaires et de leurs produits. Les opérations élémentaires ne changent pas le caractère inversible d'une matrice.

I. Systèmes linéaires

Écriture matricielle d'un système linéaire. Algorithme du pivot de Gauss. Inconnues principales, secondaires.

Systèmes incompatibles et incompatibles, système homogène. Structure de l'ensemble des solutions.

IV. Inversion des matrices et systèmes de Cramer

Système de Cramer : système dont la matrice est inversible. Il admet une et une seule solution.

Calcul de l'inverse d'un matrice, par l'algorithme du pivot de Gauss ou par résolution d'un système linéaire.

Inversibilité et inverse d'une matrice $(2, 2)$. Formules de Cramer pour $n = p = 2$.