Programme de colles
Semaine 13
du 6 au 10 janvier 2025

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Théorème d'encadrement.

2. Soit (u_n) une suite croissante. Si (u_n) est majorée alors elle converge vers sa borne supérieure.

3. Soit (u_n) une suite croissante. Si (u_n) n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.

4. Soit (u_n) une suite définie par la donnée de son premier terme et une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est croissante alors (u_n) est monotone.

5. Si (v_n) est négligeable devant (u_n) alors $(u_n + v_n)$ est équivalente à (u_n).

6. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, a^n est négligeable devant $n!$.

Exercices

Chapitre B5. Matrices

I. Définitions
II. Systèmes linéaires
III. Matrices carrées
IV. Inversion des matrices et systèmes de Cramer

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitre A7 (Suites).

Chapitre B5. **Matrices**

I. Définitions

Définition. Matrice nulle, matrice-ligne, matrice-colonne. Somme, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires, matrices E_{ij}. Produit, matrices élémentaires, opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'un matrice. Transposition.

II. Systèmes linéaires

Écriture matricielle d'un système linéaire. Algorithme du pivot de Gauss. Tout système linéaire est équivalent à un système échelonné réduit. Inconnues principales, secondaires. La notions de rang d'une matrice est présentée (c'est le nombre de pivots) sans définition rigoureuse.

Structure de l'ensemble des solutions : vide, singleton ou infini. Dans ce dernier cas il est de la forme $\{x + y\}$ où x est une solution particulière et y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène.

III. Matrices carrées

Matrices diagonales, triangulaires. Stabilité par les opérations. Matrices symétriques et antisymétriques. Toute matrice carrée s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Puissances, formule du binôme.

Matrices inversible, notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Produit de deux matrices inversibles, inversibilité de la transposée et de l'inverse d'une matrice. La matrices élémentaires sont inversibles.

IV. Inversion des matrices et systèmes de Cramer

Système de Cramer : système dont la matrice est inversible. Il admet une et une seule solution.

Toute matrice de taille (n, p) s'écrit $A = ER$ où E est inversible et R est échelonnée réduite.

Théorème : On a équivalence entre *(i)* A est inversible, *(ii)* pour toute colonne B le système $AX = B$ admet une unique solution, *(iii)* pour toute colonne B le système $AX = B$ admet au moins une solution. *(iv)* A est équivalente par lignes à l'identité,

Corollaires : une matrice carrée A est inversible si et seulement si il existe C telle que $AC = I$, ou D telle que $DA = I$.

Calcul de l'inverse d'un matrice, par l'algorithme du pivot de Gauss ou par résolution d'un système linéaire.

Inversibilité et inverse d'une matrice $(2, 2)$. Formules de Cramer pour $n = p = 2$.