Lycée Bellevue – Toulouse **20 décembre 2024**
MPSI – Mathématiques

Devoir Surveillé n°4

Durée : 3 heures – Calculatrices non autorisées

Exercices. *(8 points)*

Les questions ci-dessous sont indépendantes les unes des autres.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle : $t(t+2)y' - 2(t+5)y = 12t^7$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Calculer l'intégrale : $F(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^n x}$ en utilisant le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$.

Problème 1. *(16 points)*

Le but de ce problème est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues satisfaisant la relation :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x)^2 - f(y)^2 = f(x+y)f(x-y).$$

1. Soit f une fonction solution du problème.
   On suppose que f est deux fois dérivable et que f n'est pas la fonction nulle.
   (a) Quelle est la valeur de $f(0)$?
   (b) En dérivant par rapport à x puis par rapport à y, démontrer que :
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f''(x+y)f(x-y) = f(x+y)f''(x-y).$$
   (c) En déduire que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$.
   (d) Justifier qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que f est solution de l'équation différentielle :
   $$y'' - \alpha y = 0.$$
   (e) Donner une expression de f en fonction de α, en distinguant trois cas, selon que α soit nul, strictement positif ou strictement négatif.
   Utiliser la valeur de $f(0)$ pour préciser ces expressions de f.
2. Vérifier que les fonctions obtenues ci-dessus sont bien solutions du problème.
3. Soit f une solution du problème différente de la fonction nulle.
   (a) En utilisant le théorème fondamental, démontrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que :
   $$\int_0^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0.$$
   On note A la valeur de cette intégrale.

(b) Démontrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\quad f\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - f\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = f(x)f(y)$.

(c) En intégrant pour y allant de 0 à x_0, démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_x^{x+x_0} f\left(\frac{t}{2}\right)^2 \mathrm{d}t + \int_x^{x-x_0} f\left(\frac{t}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = Af(x).$$

(d) En déduire que f est dérivable.

Donner sa dérivée et justifier que f est deux fois dérivable.

4. Quelles sont finalement toutes les solutions du problème ?

Problème 2. *(15 points)*

Soit p un nombre premier fixé.

Dans tout ce problème le mot *diviseur* signifiera *diviseur positif*.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $\quad F_n = 2^{p^n} - 1, \quad$ *i.e.*, $\quad F_n = 2^{(p^n)} - 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que F_n divise F_{n+1}.
   On note pour toute la suite Q_n le quotient de F_{n+1} par F_n, de sorte que $F_{n+1} = Q_n F_n$.
   Donner une expression de Q_n à l'aide d'un signe somme.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que pour tout diviseur d de Q_n : $\quad 2^{p^{n+1}} \equiv 1 \ [d]$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad F_n \equiv 1 \ [p]$.
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'expression de Q_n obtenue dans la question (1) démontrer que si d est un diviseur de F_n alors : $\quad Q_n \equiv p \ [d]$

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad Q_n$ et F_n sont premiers entre eux.

   (c) Démontrer que pour tous entiers naturels distincts m et n : $\quad Q_m$ et Q_n sont premiers entre eux.
5. Soit a et b deux entiers strictement positifs premiers entre eux.
   On note : $\quad E = \left\{k \in \mathbb{N}^* \mid a^k \equiv 1 \ [b]\right\}$.

   (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note r_k le reste de la division euclidienne de a^k par b.
   Démontrer qu'il existe deux entiers i et j dans l'ensemble $\{1, \dots, b+1\}$ tels que $i < j$ et $r_i = r_j$.

   (b) Démontrer que $j - i \in E$ puis que E admet un plus petit élément.
   Ce élément est noté e et appelé *ordre de a modulo n*.

   (c) Démontrer que $E = e\mathbb{N}^*$, *i.e.*, $E = \{ek \mid k \in \mathbb{N}^*\}$.
   Pour $n \in E$ on pourra utiliser la division euclidienne de n par e.
6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit d un diviseur premier de Q_n. Démontrer que l'ordre de 2 modulo d est p^{n+1}.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit d un diviseur premier de Q_{n-1}. Démontrer que : $\quad d \equiv 1 \ [p^n]$.

   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo p^n.