

**Feuille de T. D. B6**  
**Structures algébriques**

**Exercices de cours**

① Soit  $*$  une loi de composition interne sur un ensemble  $E$ . On suppose que  $E$  admet un élément neutre  $e$  pour  $*$  et que la loi  $*$  est associative.

Démontrer si un élément  $x$  de  $E$  admet un inverse alors celui-ci est unique.

② Soit  $E$  un ensemble.

Quels sont les éléments inversibles de  $\mathcal{P}(E)$  pour la loi  $\cap$ ? Pour la loi  $\cup$ ?

③ Démontrer que l'ensemble  $\mathbb{U}$  muni de la multiplication est un groupe.

Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  l'ensemble  $\mathbb{U}_n$  muni de la multiplication est un groupe.

④ Soit  $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \circ)$  le groupe des bijections de  $\mathbb{R}$ .

Démontrer que l'ensemble  $\text{Aff}$  des applications affines  $x \mapsto ax + b$  telles que  $a$  est non-nul est un sous-groupe de  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Est-il commutatif?

⑤ a. Justifier que les applications suivantes sont des morphismes de groupes.

$$f_1 : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$$

$$n \longmapsto 3n$$

$$f_2 : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$$

$$n \longmapsto j^n$$

$$f_3 : (\mathbb{C}^*, \times) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$$

$$z \longmapsto |z|$$

b. Déterminer le noyau et l'image de ces morphismes.

Lesquels sont injectifs? Surjectifs?

⑥ Soit  $A = \mathcal{F}(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Pourquoi le triplet  $(A, +, \circ)$  n'est-il pas un anneau?

⑦ Démontrer que dans un anneau intègre  $A$  on peut simplifier par un élément non-nul :

Soit  $a \in A \setminus \{0_A\}$ . Alors :

$$\forall (x, y) \in A^2 \quad ax = ay \implies x = y$$

$$\text{et} \quad xa = ya \implies x = y$$

⑧ Démontrer que le seul sous-anneau de  $\mathbb{Z}$  est  $\mathbb{Z}$  lui-même.

**Travaux dirigés**

① Soit  $E$  un ensemble muni de deux lois de composition interne  $\star$  et  $\circ$ , admettant chacune un élément neutre, noté  $e$  pour  $\star$  et  $f$  pour  $\circ$ . On suppose que :

$$\forall (x, y, z, t) \in E^4 \quad (x \star y) \circ (z \star t) = (x \circ z) \star (y \circ t)$$

a. Démontrer que  $e = f$ .

b. Démontrer que les lois  $\star$  et  $\circ$  sont égales.

c. Démontrer que cette loi est commutative et associative.

② Soit  $I = ]-1, 1[$ . On définit :

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad x \oplus y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

a. Démontrer que  $\oplus$  est une loi de composition interne de  $I$ .

b. Démontrer que le couple  $(I, \oplus)$  est un groupe.

c. Calculer les itérés de  $\frac{1}{2}$ .

d. Démontrer que l'application  $\text{th} : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (I, \oplus)$  est un isomorphisme de groupes.

③ Soit  $E$  un ensemble.

Les couples  $(\mathcal{P}(E), \cap)$  et  $(\mathcal{P}(E), \cup)$  sont-ils des groupes?

④ Soit  $M$  une matrice de taille  $(n, n)$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ , à coefficient dans  $\mathbb{K}$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On note :

$$Z(M) = \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$$

Démontrer que  $Z(M)$  est un sous-groupe de  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ .

⑤ Soit  $G$  un groupe d'élément neutre  $e$ .

On suppose que pour tout  $x \in G$  :  $x^2 = e$

Démontrer que  $G$  est abélien.

⑥ Soit  $G$  un groupe d'élément neutre  $e$ .

Soit  $x$  et  $y$  deux éléments de  $G$  tels que :

$$xyx = y \quad \text{et} \quad yxy = x$$

Démontrer que  $x^2y^2 = e$  puis que  $x^4 = y^4 = e$ .

⑦ Soit  $(G, *)$  un groupe à trois éléments.

Soit  $e, a, b$  ses trois éléments,  $e$  étant le neutre.

Donner la table de multiplication de  $G$ .

Donner ensuite un exemple de tel groupe.

- 8** Soit  $(G, *)$  une groupe fini.
- Démontrer que dans la table de multiplication de  $G$ , chaque élément de  $G$  apparaît au plus une fois dans chaque colonne.
  - En déduire que chaque élément de  $G$  apparaît une et une seule fois dans chaque colonne de la table de multiplication.
  - Justifier que chaque élément de  $G$  apparaît une et une seule fois dans chaque ligne de la table de multiplication.
- 9** Soit  $(G, *)$  un groupe à quatre éléments, et soit  $e$  son élément neutre.
- On suppose que tout élément  $x$  de  $G$  vérifie  $x^2 = e$ . En notant  $e, a, b, c$  les éléments de  $G$  donner sa table de multiplication.  
Le groupe  $G$  est-il commutatif?
  - On suppose qu'il existe  $a \in G$  tel que  $a^2 \neq e$ .  
Donner la table de multiplication de  $G$ .
- 10** Soit  $(G, *)$  un groupe.
- Démontrer que les applications  $g \mapsto ag$  et  $g \mapsto ga$  sont des bijections de  $G$ . Sont-elles des endomorphismes?
  - Démontrer que l'application  $g \mapsto aga^{-1}$  est un automorphisme de  $G$ .
  - Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'application  $g \mapsto g^{-1}$  soit un automorphisme de groupe.
- 11** Soit  $G$  l'ensemble des bijections de l'ensemble  $X = \{a, b, c\}$ .
- Justifier que  $(G, \circ)$  est un groupe fini.
  - On note  $e$  l'élément neutre de  $G$ , et  $\tau$  et  $\sigma$  les applications :
- $$\begin{array}{ccc} \tau : & a \mapsto b & \text{et} & \sigma : & a \mapsto b \\ & b \mapsto a & & & b \mapsto c \\ & c \mapsto c & & & c \mapsto a \end{array}$$
- Démontrer que :
- $$G = \{e, \sigma, \sigma^2, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2\}$$
- Identifier l'élément  $\sigma\tau$ .
- 12** Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $n$  un entier naturel non-nul. On définit l'application :
- $$f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \longmapsto \frac{1}{2}(M + {}^tM)$$
- Justifier que  $f$  est un endomorphisme du groupe  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +)$ .
  - Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .

- 13** Soit  $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  muni de la loi  $*$  définie par :
- $$\forall ((x, y), (x', y')) \in G^2 \\ (x, y) * (x', y') = (xx', yx' + y')$$
- Démontrer que  $(G, *)$  est un groupe.
  - Est-il abélien ?
  - Démontrer que  $H = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}^*\}$   
et  $K = \{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$   
sont deux sous-groupes abéliens de  $(G, *)$ .
  - Démontrer que les applications :  
 $\varphi : (\mathbb{R}^*, \times) \longrightarrow G$  et  $\psi : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow G$   
 $x \longmapsto (x, 0)$  et  $y \longmapsto (1, y)$   
sont des morphismes de groupes.
  - Donner les noyaux et les images de ces morphismes. Que retrouve-t-on ?
- 14** Le but de cet exercice est de déterminer tous les sous-groupes de  $(\mathbb{Z}, +)$ .
- Démontrer que pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m\mathbb{Z}$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ .  
Soit  $H$  un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ .
  - Démontrer que si  $H \cap \mathbb{N}^*$  est non-vidé alors il admet un minimum  $m$ , puis que  $H = m\mathbb{Z}$ .
  - Qu'en est-il si  $H \cap \mathbb{N}^*$  est vidé ?
  - Conclure.
- 15** Pour  $m$  et  $n$  entiers naturels non-nuls on pose :
- $$f : \mathbb{U}_n \longrightarrow \mathbb{U}_n \\ z \longmapsto z^m.$$
- Justifier que  $f$  est bien définie et que c'est un endomorphisme du groupe  $(\mathbb{U}_n, \times)$ .
  - Démontrer que le noyau de  $f$  est  $\mathbb{U}_{m \wedge n}$ .
- 16** Soit  $A$  un anneau,  $a$  et  $b$  deux éléments de  $A$ .
- Démontrer que  
$$aba = 1 \iff (a^2b = ba^2 = 1)$$
  - Démontrer que dans ce cas  $a$  et  $b$  sont inversibles et commutent.
- 17** Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}$  on pose :
- $$x \oplus y = x + y - 1 \quad x \otimes y = x + y - xy$$
- Démontrer que  $(\mathbb{R}, \oplus)$  est un groupe abélien.
  - Démontrer que  $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$  est un anneau commutatif.
  - Cet anneau est-il un corps ?
- 18** On note  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ .
- Démontrer que  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  est un sous-anneau de  $\mathbb{R}$ .
  - Démontrer que  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  est un corps.  
On dit alors que  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  est un sous-corps de  $\mathbb{R}$ .

**19** Soit  $\mathbb{D}$  l'ensemble des nombres décimaux.

- Démontrer que  $\mathbb{D}$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ .
- Démontrer que  $(\mathbb{D}, +, \times)$  est un anneau.  
Est-il un corps ?
- Décrire le groupe des inversibles de  $\mathbb{D}$ .

**20** On note :

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

- Démontrer que  $\mathbb{Z}[i]$  muni de l'addition et de la multiplication des complexes est un anneau.
- Justifier que l'application  $N : z \mapsto |z|^2$  est un morphisme de groupes de  $(\mathbb{C}^*, \times)$  dans  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ .
- Démontrer que  $N(\mathbb{Z}[i]) \subseteq \mathbb{N}$ .  
En déduire le groupe des inversibles de  $\mathbb{Z}[i]$ .

**21** Soit  $K$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$ , c'est-à-dire un sous-anneau de  $\mathbb{C}$  qui est un corps.

Démontrer que  $\mathbb{Q} \subseteq K$ .

**22** Démontrer que si un anneau intègre est fini alors c'est un corps.

On pourra considérer l'ensemble des  $a^k$  où  $k \in \mathbb{N}$ .

**23** Soit  $K$  un corps et  $A$  un anneau. Démontrer que tout morphisme d'anneaux  $f : K \rightarrow A$  est injectif.

**24** On définit l'ensemble :

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- Démontrer que  $C$  est un sous-anneau de  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ .
- Démontrer que  $C$  est un corps
- Démontrer que ce corps est isomorphe à  $\mathbb{C}$ , c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme d'anneaux de  $C$  dans  $\mathbb{C}$ .