Corrigé du Devoir à la Maison n°7

1. On suppose d'abord que Δ est non-nul.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de F, c'est-à-dire une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$$

avec α et β deux nombres complexes fixés.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n &= a\Big(\alpha\lambda_1^{n+2} + \beta\lambda_2^{n+2}\Big) + b\Big(\alpha\lambda_1^{n+1} + \beta\lambda_2^{n+1}\Big) + c(\alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n) \\ &= \alpha\lambda_1^n(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c) + \beta\lambda_2^n(a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c) \end{aligned}$$

Comme λ_1 et λ_2 sont les solutions de l'équation (C) alors :

$$a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c = a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c = 0$$

Ceci montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

En d'autres termes la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E.
On a démontré que tout élément de F appartient à E, donc que $F \subseteq E$.

On suppose maintenant que Δ est nul. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de F, c'est-à-dire une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (\alpha n + \beta)\lambda_0^n$$

avec α et β sont deux nombres complexes fixés.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n &= a(\alpha(n+2) + \beta)\lambda_0^{n+2} + b(\alpha(n+1) + \beta)\lambda_0^{n+1} + c(\alpha n + \beta)\lambda_0^n \\ &= \lambda_0^n\Big[\alpha n(a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c) + \beta\lambda_0(2a\lambda_0 + b)\Big] \end{aligned}$$

Or λ_0 est solution de (C). De plus le discriminant de (C) est nul donc $\lambda_0 = -\frac{b}{2a}$, et ainsi :

$$a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c = 2a\lambda_0 + b = 0$$

Ceci montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

Dans ce cas aussi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E.

Finalement on a démontré que tout élément de F appartient à E, donc que $F \subseteq E$.

2. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E et a est non-nul alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = -\frac{b}{a}u_{n+1} - \frac{c}{a}u_n$$

On peut donc écrire :

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a}u_{n+1} - \frac{c}{a}u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} & -\frac{c}{a} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

Ceci donne $U_{n+1} = AU_n$ en posant :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} & -\frac{c}{a} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} -b & -c \\ a & 0 \end{pmatrix}}$$

3. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $U_n = A^nU_0$.
On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation. Comme $A^0 = I_2$ alors $U_0 = A^0U_0$ et donc la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie : $U_n = A^nU_0$.
D'après la question précédente on a $U_{n+1} = AU_n$, donc $U_{n+1} = AA^nU_0 = A^{n+1}U_0$. La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
On a démontré que la propriété $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.
Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad U_n = A^nU_0.}$$

4. (a) Comme λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation (C) alors $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a}$ et $\lambda_1\lambda_2 = \frac{c}{a}$, donc :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & -\lambda_1\lambda_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche un vecteur non-nul C_1 tel que $AC_i = \lambda_iC_i$, ce qui s'écrit

$$(A - \lambda_1 I_2)C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par équivalences, pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned}(A - \lambda_1 I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} \lambda_2 & -\lambda_1\lambda_2 \\ 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \quad \begin{cases} \lambda_2(x - \lambda_1 y) = 0 \\ x - \lambda_1 y = 0 \end{cases} \quad \iff \quad x = \lambda_1 y\end{aligned}$$

Le vecteur $C_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

De même le vecteur $C_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie $AC_2 = \lambda_2C_2$.

La matrice P est donc : $P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Le déterminant de P est :

$$\det P = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1$$

Comme le discriminant Δ est non-nul alors les deux solutions de l'équation (C) sont distinctes, donc $\lambda_1 \neq \lambda_2$, et ainsi le déterminant de P est non-nul.
Par propriété P est inversible, et sa matrice inverse est :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} -1 & \lambda_2 \\ 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix}}$$

(c) Le calcul donne :

$$\begin{aligned} D = P^{-1}AP &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} -1 & \lambda_2 \\ 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & -\lambda_1\lambda_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}$$

(d) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad A^n = PD^nP^{-1}$
On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation. Comme $A^0 = D^0 = I_2$ alors :

$$PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2 = A^0$$

La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

On sait que $D = P^{-1}AP$. En multipliant par P à gauche et par P^{-1} à droite on obtient :

$$PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = A$$

Ceci donne

$$A^{n+1} = AA^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PDI_2D^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
On a démontré que la propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire.
Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad A^n = PD^nP^{-1}}$$

(e) On obtient :

$$P^{-1}U_0 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\begin{pmatrix} -1 & \lambda_2 \\ 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\begin{pmatrix} -u_1 + \lambda_2 u_0 \\ u_1 - \lambda_1 u_0 \end{pmatrix}$$

Comme la matrice D est diagonale alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

Cette égalité est valable aussi pour $n = 0$ car λ_1 et λ_2 ne peuvent être nuls.
En effet, $\lambda_1\lambda_2 = \frac{c}{a}$ avec c supposé non-nul.
On calcule ensuite :

$$D^n P^{-1}U_0 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\begin{pmatrix} (-u_1 + \lambda_2 u_0)\lambda_1^n \\ (u_1 - \lambda_1 u_0)\lambda_2^n \end{pmatrix}$$

D'après les questions précédentes :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad U_n = A^n U_0 \qquad \text{et} \qquad A^n = PD^nP^{-1} \qquad \text{donc} \qquad U_n = PD^nP^{-1}U_0$$

On en déduit :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\begin{pmatrix} (-u_1 + \lambda_2 u_0)\lambda_1^n \\ (u_1 - \lambda_1 u_0)\lambda_2^n \end{pmatrix}$$

La seconde ligne de cette égalité matricielle donne :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{\lambda_2 u_0 - u_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\lambda_1)^n + \frac{u_1 - \lambda_1 u_0}{\lambda_2 - \lambda_1}(\lambda_2)^n}$$

(f) On pose :

$$\alpha = \frac{\lambda_2 u_0 - u_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{u_1 - \lambda_1 u_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Alors α et β sont deux complexes et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \alpha(\lambda_1)^n + \beta(\lambda_2)^n$$

Ceci montre que la suite (u_n) est élément de l'ensemble F.
On a donc démontré que tout élément de E appartient à F : $E \subseteq F$
Dans la première question on a démontré que $F \subseteq E$.
Par double inclusion on obtient le résultat désiré dans le cas où Δ est non-nul :

$$E = F$$

5. (a) Comme dans la question 4 (a) on obtient $A = \begin{pmatrix} 2\lambda_0 & -\lambda_0^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

De plus comme ci-dessus le vecteur $C_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non-nul et vérifie $AC_0 = \lambda_0 C_0$.

On cherche un vecteur C_0' tel que $AC_0' = \lambda_0 C_0' + C_0$, ce qui équivaut à :

$$(A - \lambda_0 I_2)C_0' = C_0$$

Or pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned}
(A - \lambda_0 I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad & \iff \quad \begin{pmatrix} \lambda_0 & -\lambda_0^2 \\ 1 & -\lambda_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \iff \quad \begin{cases} \lambda_0(x - \lambda_0 y) = \lambda_0 \\ x - \lambda_0 y \;=\; 1 \end{cases} \quad \iff \quad x = \lambda_0 y + 1
\end{aligned}$$

Le vecteur $C_0' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient.

La matrice P est donc : $P = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Le déterminant de P est :

$$\det P = \begin{vmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Comme il n'est pas nul alors P est inversible et sa matrice inverse est :

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda_0 \end{pmatrix}}$$

(c) On obtient :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\lambda_0 & -\lambda_0^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}}$$

(d) On pourrait calculer D^n par récurrence, en devinant son expression générale.

On utilise ici plutôt la formule du binôme pour les matrices.

On remarque que :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_0 I_2 + J \qquad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule que $J^2 = 0_2$, ce dont on déduit :

$$\forall k \geqslant 2 \qquad J^k = 0_2$$

Les matrices $\lambda_0 I_2$ et J commutent (car $\lambda_0 I_2 J = J\lambda_0 I_2 = \lambda_0 J$) donc d'après la formule du binôme :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad D^n = (\lambda_0 I_2 + J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\lambda_0 I_2)^{n-k} J^k$$

Comme $J^k = 0_2$ pour $k \geqslant 2$ alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \qquad D^n &= \binom{n}{0}(\lambda_0 I_2)^n + \binom{n}{1}(\lambda_0 I_2)^{n-1} J \\ &= (\lambda_0)^n I_2 + (\lambda_0)^{n-1} nJ = (\lambda_0)^{n-1}(\lambda_0 I_2 + nJ) = (\lambda_0)^{n-1} \begin{pmatrix} \lambda_0 & n \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a démontré :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad D^n = (\lambda_0)^{n-1} \begin{pmatrix} \lambda_0 & n \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}}$$

(e) Comme dans la question 4 on obtient $U_n = PD^nP^{-1}U_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\lambda_0)^{n-1} \begin{pmatrix} \lambda_0 & n \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

Ceci donne, en ne gardant que la seconde ligne de la matrice-colonne obtenue ci-dessus :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (u_1 - \lambda_0 u_0) n (\lambda_0)^{n-1} + u_0(\lambda_0)^n$$

(f) Comme $\lambda_0^2 = \frac{c}{a}$ et c est supposé non-nul alors λ_0 est non-nul.
On peut donc écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \left(\left(\frac{u_1}{\lambda_0} - u_0 \right) n + u_0 \right) (\lambda_0)^n$$

On pose :

$$\alpha = \frac{u_1}{\lambda_0} - u_0 \qquad \text{et} \qquad \beta = u_0$$

Alors α et β sont deux complexes et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (\alpha n + \beta)(\lambda_0)^n$$

La suite (u_n) est donc élément de l'ensemble F.
On a démontré que tout élément de E appartient à F : $E \subseteq F$
Dans la première question on a démontré que $F \subseteq E$.
Par double inclusion on obtient le résultat désiré dans le cas où Δ est non-nul :

$$E = F$$

Ce résultat est maintenant démontré pour toutes valeurs de Δ.