Devoir à la Maison n°8

Théorème de Cesàro et applications

Dans ce devoir on démontre le théorème suivant et on donne des équivalents simples de deux suites récurrentes.

> **Théorème de Cesàro.** *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, et soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :*
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad y_n = \frac{x_0 + \cdots + x_{n-1}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k.$$
>
> *Si (x_n) converge vers un réel ℓ alors (y_n) converge également vers ℓ.*

Partie A. Démonstration dans le cas monotone

Dans les questions 1 à 3 on suppose que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle converge vers un réel ℓ. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par le théorème.

1. Justifier que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et donner sa borne supérieure.
2. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad y_n \leqslant x_n$.
   (b) Démontrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   (c) En déduire qu'elle converge.
3. (a) Démontrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2y_{2n} - y_n \geqslant x_n$.
   (b) En déduire que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ, ce qui achève la démonstration du théorème dans le cas où la suite (x_n) est croissante.
4. Déduire de ce qui précède que le théorème de Cesàro est valable aussi dans le cas où la suite (x_n) est décroissante.

Partie B.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $a_0 > 0$ et : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{1+a_n}}$.

1. Justifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive.
2. Démontrer qu'elle converge et déterminer sa limite.
3. Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad b_n = \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$.
   (a) Démontrer que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Exprimer b_n en fonction de a_n et f. En déduire que la suite $(b_n)_n$ converge vers $\frac{1}{2}$.
   (c) Démontrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $c_n = \dfrac{b_0 + \cdots + b_{n-1}}{n}$.
   Expliciter c_n en fonction de a_n et a_0, et en déduire que $a_n \sim \frac{2}{n}$.

Partie C.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n}$.
On justifie comme dans la partie précédente que cette suite est bien définie et strictement positive. Ceci sera admis pour la suite.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$.

   À l'aide de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en utilisant la partie précédente donner un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie D. Cas général

Le but de cette partie est de démontrer le théorème dans le cas général.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 0, soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par le théorème, et soit ε un réel strictement positif.
   (a) Justifier l'existence
      (i) d'un entier N_1 tel que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left(n \geqslant N_1 \quad \Longrightarrow \quad |x_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$,
      (ii) d'un majorant M de la suite $(|x_n|)$.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n \geqslant N_1$ alors :
   $$|y_n| \leqslant \frac{N_1 M}{n} + \frac{n - N_1}{n}\,\frac{\varepsilon}{2}.$$
   (c) Justifier l'existence d'un entier N_2 supérieur ou égal à $\frac{2N_1M}{\varepsilon}$, puis d'un certain rang N à partir duquel $|y_n| \leqslant \varepsilon$.
2. Démontrer le théorème dans le cas où $\ell = 0$.
3. En déduire sa démonstration dans le cas général.

Ernesto Cesàro, 1859 – 1906 mathématicien italien.

Le théorème figure dans le cours d'analyse d'Augustin Louis Cauchy de 1821.