

Feuille de T. D. A8
Limites et continuité

————— Exercices de cours —————

① Interpréter en termes de quantificateurs les égalités suivantes (où a et ℓ sont des réels) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \ell \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty \quad \lim_a f = -\infty$$

② Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subseteq J$. Soit a un point de I . Démontrer sans utiliser de voisinages que si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a .

③ Soit I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et a un élément de \bar{I} . On suppose que f admet une limite ℓ finie et strictement positive en a .

Alors f est strictement positive au voisinage de a .

a. Exprimer cette conclusion à l'aide des quantificateurs, selon que a soit fini ou non.

b. Démontrer cette proposition.

④ Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

a. Cette fonction admet-elle une limite en 0 ?

b. Expliciter f sur $]\frac{1}{2}, 1]$ et sur $]1, +\infty[$.

Est-elle continue en 1 ?

⑤ Démontrer l'équivalence : $1 - \cos u \underset{(0)}{\sim} \frac{u^2}{2}$

⑥ Démontrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^\alpha \underset{(0)}{=} 1 + \alpha x + o(x)$$

⑦ Calculer les limites suivantes.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x^3}{4x^2-2x+1}$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x\sqrt{x}+5}$

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x^3+x-2)^2}{(x-1)^6}$ d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}-\ln x}{\sqrt{x}+\ln x}$

e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3x^5-1}$ f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{3x^5-1}$

g. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x-1}{3x+1} \right)^{(2x+3)}$ h. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{(x-1)}$

i. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos(2x + \frac{\pi}{6})}{\sin(5x + \frac{\pi}{6})}$ j. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{\frac{x^2}{x+1}}$

⑧ Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue.

Démontrer qu'il existe un réel $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

⑨ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue admettant $-\infty$ pour limite en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$.

Démontrer que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

⑩ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

Démontrer que f est bornée.

⑪ Soit f une fonction continue et injective sur un intervalle I .

a. Énoncer en termes logiques la proposition : f n'est pas strictement monotone.

Soit a, b, c et d quatre éléments de I tels que $a < b$ et $c < d$, $f(a) \leq f(b)$ et $f(c) \geq f(d)$. On définit la fonction :

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(ta + (1-t)c) - f(tb + (1-t)d)$$

b. Démontrer qu'il existe $\tau \in [0, 1]$ tel que $g(\tau) = 0$.

c. En déduire une contradiction et conclure.

⑫ Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{C}$

$$t \mapsto \frac{e^{it} - 1}{t}$$

Démontrer que f est continue et prolongeable par continuité en 0.

————— Travaux dirigés —————

① Les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} suivantes sont-elles continues ?

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{|x(x-1)|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^8-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ 8 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

② Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes. Déterminer ensuite sur quel ensemble elles sont prolongeables par continuité.

$$f_1(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \quad f_2(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{4}{x^2-2x-3}$$

$$f_3(x) = \frac{\ln(4x^2-1)}{\ln(2x-1)} \quad f_4(x) = \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{\tan x - 1}$$

3 Calculer les limites suivantes.

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x - 4} - \sqrt{x^2 - 4x + 2}$ c. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \ln x)^{\tan(\frac{\pi x}{2})}$
- d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{\ln(x + 1)}$ e. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{(\cos 2x)(\cos x - \sin x)}}{x - \frac{\pi}{4}}$ f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{ch} 2x) \ln(\operatorname{th} x)$
- g. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 3x}{\operatorname{sh} 2x}$ h. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin \sqrt{x}) \ln 2x$ i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x \ln^2 x$ j. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{sh}(\ln \sqrt{x^2 + 1})}{x}$
- k. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x)^{\sin x}$ l. $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin 3x}{\cos \frac{x}{4}}$ m. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - x$ n. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$
- o. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}}$ p. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2 e^x}$ q. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x}{a^{x^2}} \quad (a > 1)$ r. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$
- s. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^5 x - \sqrt{x}$ t. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\tan 6x}{\cos(x + \frac{\pi}{3})}$ u. $\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\cos \frac{x}{2}}}$ v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + a^{\frac{1}{x}}}{2} \right)^x \quad (a > 0)$
- w. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$ x. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{\lfloor x^2 \rfloor}$ y. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)}$ z. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1) \tan(\pi x)$

4 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x(x + 1)}$$

Cette fonction est-elle bornée ? Continue ?

5 a. Si x est un réel strictement positif, calculer :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{x^t - 1}{t}$$

b. Soit z un nombre complexe non-nul de module r et d'argument θ . Démontrer que la limite

$$\ell = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r^t e^{i\theta t} - 1}{t}$$

existe et la calculer. Que vaut e^ℓ ?

6 Étudier la continuité de :

$$f : x \rightarrow \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$$

7 Donner des équivalents simples au point a indiqué de chacune des fonctions suivantes.

- a. $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^3}$ en $a = 0$
- b. $f(x) = \frac{e^{\sin x} - 1}{\cos x - 1}$ en $a = 0$
- c. $f(x) = \frac{\sin(nx) \cos(mx)}{\tan x}$ en $a = 0 \quad (m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$
- d. $f(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^3}$ en $a = 0$ puis en $a = +\infty$
- e. $f(x) = \tan x$ en $a = \frac{\pi}{2}$
- f. $f(x) = x^{\sin x} - 1$ en $a = 0^+$
- g. $g(x) = \cos \sqrt{x} - 1$ en $a = 0^+$
- h. $h(x) = x^{\sin x} - \cos \sqrt{x}$ en $a = 0^+$
- i. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en $a = 0$ puis $a = 1$
- j. $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln x}$ en $a = +\infty$

8 Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, g ne s'annulant pas. On suppose que f et g sont équivalentes en a et que f est strictement positive.

- a. Démontrer qu'il existe un voisinage de a sur lequel f et g sont strictement positives.
- b. Démontrer que si f est bornée au voisinage de a alors g est bornée au voisinage de a .
- c. Soit α un réel. Démontrer que f^α et g^α sont équivalentes au voisinage de a .
- d. Démontrer que si f est bornée alors e^f et e^g sont équivalentes en a .
- e. Démontrer que si f tend vers $+\infty$ en a alors $\ln f$ et $\ln g$ sont équivalentes en a .

9 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Soit $a = f(1)$.

- a. Déterminer $f(0)$.
- b. Calculer $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- c. Calculer $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
- d. Calculer $f(r)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.
- e. Démontrer que $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

10 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sin \frac{1}{x}$$

- a. Soit $u_n = \frac{1}{n\pi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Donner les limites de (u_n) et de $f(u_n)$.
- b. Déterminer une suite (v_n) tendant vers 0 telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(v_n) = 1$
- c. La fonction f admet-elle une limite en 0 ?

11 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) = f(x)$$

Démontrer que f est constante.

Indication : étudier les $f(\frac{x}{2^n})$, $n \in \mathbb{N}$.

12 Soit D une partie de \mathbb{R} et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Soit K un réel. On dit que f est K -lipschitzienne si :

$$\forall (x, y) \in D^2 \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

On dit que f est lipschitzienne s'il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que f est K -lipschitzienne.

- Démontrer que si f est lipschitzienne alors f est continue.
- En considérant la fonction carré démontrer que la réciproque est fautive.
- Démontrer que si f est dérivable et lipschitzienne alors sa dérivée est bornée.

13 Cet exercice fait suite au précédent.

Une fonction f est dite contractante si elle est K -lipschitzienne pour un réel $K \in [0, 1[$.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction contractante.

- Soit $g = f - \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(0) - K|x| - x \leq g(x) \leq f(0) + K|x| - x$$

En déduire les limites de g en $\pm\infty$

- Démontrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$.
- Démontrer que ce point fixe est unique.
- Soit (u_n) une suite telle :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Démontrer que cette suite converge vers le point fixe de f .

14 Soit a, b deux réels tels que $a < b$.

- Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continue. Démontrer que f possède un point fixe.
- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$5f(c) = 2f(a) + 3f(b)$$

15 Démontrer que :

- Il existe une infinité de réels x tels que $\tan x = x$.
- Il existe une infinité de réels x tels que $\cos x = e^x$.

16 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que $f(0) = f(1)$.

- Démontrer qu'il existe $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que :

$$f(\alpha + \frac{1}{2}) = f(\alpha)$$

- Démontrer qu'il existe $\beta \in [0, \frac{2}{3}]$ tel que :

$$f(\beta + \frac{1}{3}) = f(\beta)$$

17 Un randonneur a parcouru 20 km en 5 heures.

- Démontrer qu'il existe un intervalle d'une heure pendant lequel il a parcouru exactement 4 km.
- Le randonneur prétend que sur n'importe quel intervalle de deux heures il a parcouru 10 km. Est-ce possible?

18 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue non constante telle que $f(a) = f(b)$.

Soit y un élément non extremum de $f([a, b])$.

Démontrer que y admet au moins deux antécédents par f .

19 Soit $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que f est bornée et g est continue.

Démontrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

20 Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , continue et périodique.

- Démontrer que f est bornée.
- On suppose que f admet une limite en $+\infty$. Que dire de f ?
Indication : utiliser une suite.

21 Soient f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que $f > g$.

- Démontrer qu'il existe un réel a strictement positif tel que :

$$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) \geq g(x) + a$$

- Montrer que ce résultat est faux si on remplace $[0, 1]$ par $]0, 1]$.

22 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

- Démontrer que si $f(0) < 0$ et f admet une limite strictement positive en $+\infty$ alors il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(c) = 0$.
- Démontrer que si f tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$ alors f admet un minimum.
- Démontrer que si f tend vers 0 en $\pm\infty$ et f prend au moins une valeur strictement positive et une valeur strictement négative alors f est bornée et atteint ses bornes.

23 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) - f(y)| \geq |x - y|$$

Démontrer que f est bijective.

24 Soit a, b, c, d quatre réels tels que $a < b$ et $c < d$. Soit $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ croissante et surjective.

Démontrer que f est continue.

On pourra utiliser la théorème de la limite monotone.