Feuille de T. D. A8
Limites et continuité

Exercices de cours

1 Interpréter en termes de quantificateurs les égalités suivantes (où a et ℓ sont des réels) :

$$\lim_{-\infty} f = \ell \qquad \lim_{+\infty} f = -\infty \qquad \lim_{a} f = -\infty$$

2 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subseteq J$. Soit a un point de I. Démontrer sans utiliser de voisinages que si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

3 Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et a un élément de $\overline{I}$. On suppose que f admet une limite ℓ finie et strictement positive en a.

Alors f est strictement positive au voisinage de a.

a. Exprimer cette conclusion à l'aide des quantificateurs, selon que a soit fini ou non.

b. Démontrer cette proposition.

4 Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \end{array}$

a. Cette fonction admet-elle une limite en 0 ?

b. Expliciter f sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ et sur $]1, +\infty[$.
Est-elle continue en 1 ?

5 Démontrer l'équivalence : $\quad 1 - \cos u \underset{(0)}{\sim} \frac{u^2}{2}$

6 Démontrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^{\alpha} \underset{(0)}{=} 1 + \alpha x + o(x)$$

7 Calculer les limites suivantes.

a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3-x^3}{4x^2-2x+1}$ b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x\sqrt{x}+5}$

c. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(3x^3+x-2)^2}{(x-1)^6}$ d. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-\ln x}{\sqrt{x}+\ln x}$

e. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3x^5-1}$ f. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{3x^5-1}$

g. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4x-1}{3x+1}\right)^{(2x+3)}$ h. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{(x-1)}$

i. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(2x+\frac{\pi}{6})}{\sin(5x+\frac{\pi}{6})}$ j. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$

8 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue.
Démontrer qu'il existe un réel $\alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

9 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant $-\infty$ pour limite en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$.
Démontrer que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

Démontrer que f est bornée.

11 Soit f une fonction continue et injective sur un intervalle I.

a. Énoncer en termes logiques la proposition : f n'est pas strictement monotone.

Soit a, b, c et d quatre éléments de I tels que $a < b$ et $c < d$, $f(a) \leqslant f(b)$ et $f(c) \geqslant f(d)$. On définit la fonction :

$$g : \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(ta+(1-t)c) - f(tb+(1-t)d) \end{array}$$

b. Démontrer qu'il existe $\tau \in [0,1]$ tel que $g(\tau) = 0$.

c. En déduire une contradiction et conclure.

12 Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{e^{it}-1}{t} \end{array}$

Démontrer que f est continue et prolongeable par continuité en 0.

Travaux dirigés

1 Les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes sont-elles continues ?

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{|x(x-1)|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^8-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ 8 & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}$$

2 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes. Déterminer ensuite sur quel ensemble elles sont prolongeables par continuité.

$$f_1(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \qquad f_2(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{4}{x^2-2x-3}$$

$$f_3(x) = \frac{\ln(4x^2-1)}{\ln(2x-1)} \qquad f_4(x) = \frac{\sqrt{2}\sin x - 1}{\tan x - 1}$$

3 Calculer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$ b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x-4}-\sqrt{x^2-4x+2}$ c. $\lim\limits_{x\to1} (1+\ln x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

d. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{5^x-1}{\ln(x+1)}$ e. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{(\cos 2x)(\cos x-\sin x)}}{x-\frac{\pi}{4}}$ f. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\operatorname{ch} 2x)\ln(\operatorname{th} x)$

g. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{sh} 3x}{\operatorname{sh} 2x}$ h. $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\sin\sqrt{x}\right)\ln 2x$ i. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x\ln^2 x$ j. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\operatorname{sh}\left(\ln\sqrt{x^2+1}\right)}{x}$

k. $\lim\limits_{x\to0^+} (\tan x)^{\sin x}$ l. $\lim\limits_{x\to2\pi} \dfrac{\sin 3x}{\cos\frac{x}{4}}$ m. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2}-x$ n. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$

o. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-\sqrt{x}}$ p. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{ch} x-1}{x^2e^x}$ q. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^x}{a^{x^2}}$ $(a>1)$ r. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

s. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln^5 x-\sqrt{x}$ t. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\tan 6x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$ u. $\lim\limits_{x\to\pi} (1+\sin x)^{\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}}$ v. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1+a^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$ $(a>0)$

w. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$ x. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{\lfloor x^2\rfloor}$ y. $\lim\limits_{x\to0} (\cos x)^{\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)}$ z. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$

4 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-\lfloor x\rfloor}{x(x+1)} \end{array}$

Cette fonction est-elle bornée ? Continue ?

5 a. Si x est un réel strictement positif, calculer :

$$\lim_{t\to0} \frac{x^t-1}{t}$$

b. Soit z un nombre complexe non-nul de module r et d'argument θ. Démontrer que la limite

$$\ell = \lim_{t\to0} \frac{r^te^{i\theta t}-1}{t}$$

existe et la calculer. Que vaut e^ℓ ?

6 Étudier la continuité de :

$$f : x \to \lfloor x\rfloor + \sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$$

7 Donner des équivalents simples au point a indiqué de chacune des fonctions suivantes.

a. $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^3}$ en $a=0$

b. $f(x) = \frac{e^{\sin x}-1}{\cos x-1}$ en $a=0$

c. $f(x) = \frac{\sin(nx)\cos(mx)}{\tan x}$ en $a=0$ $(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}$

d. $f(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^3}$ en $a=0$ puis en $a=+\infty$

e. $f(x) = \tan x$ en $a=\frac{\pi}{2}$

f. $f(x) = x^{\sin x}-1$ en $a=0^+$

g. $g(x) = \cos\sqrt{x}-1$ en $a=0^+$

h. $h(x) = x^{\sin x}-\cos\sqrt{x}$ en $a=0^+$

i. $f(x) = \frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en $a=0$ puis $a=1$

j. $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)}-\sqrt{\ln x}$ en $a=+\infty$

8 Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$, g ne s'annulant pas. On suppose que f et g sont équivalentes en a et que f est strictement positive.

a. Démontrer qu'il existe un voisinage de a sur lequel f et g sont strictement positives.

b. Démontrer que si f est bornée au voisinage de a alors g est bornée au voisinage de a.

c. Soit α un réel. Démontrer que f^α et g^α sont équivalentes au voisinage de a.

d. Démontrer que si f est bornée alors e^f et e^g sont équivalentes en a.

e. Démontrer que si f tend vers $+\infty$ en a alors $\ln f$ et $\ln g$ sont équivalentes en a.

9 Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x)+f(y)$$

Soit $a=f(1)$.

a. Déterminer $f(0)$.

b. Calculer $f(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

c. Calculer $f(n)$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

d. Calculer $f(r)$ pour tout $r\in\mathbb{Q}$.

e. Démontrer que $f(x)=ax$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

10 On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\frac{1}{x} \end{array}$

a. Soit $u_n = \frac{1}{n\pi}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
Donner les limites de (u_n) et de $f(u_n)$.

b. Déterminer une suite (v_n) tendant vers 0 telle que : $\forall n\in\mathbb{N} \quad f(v_n)=1$

c. La fonction f admet-elle une limite en 0 ?

11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(2x) = f(x)$$
Démontrer que f est constante.

Indication : étudier les $f(\frac{x}{2^n})$, $n \in \mathbb{N}$.

12 Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. Soit K un réel. On dit que f est K-lipschitzienne si :
$$\forall (x, y) \in D^2 \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|$$
On dit que f est lipschitzienne s'il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que f est K-lipschitzienne.

a. Démontrer que si f est lipschitzienne alors f est continue.

b. En considérant la fonction carré démontrer que la réciproque est fausse.

c. Démontrer que si f est dérivable et lipschitzienne alors sa dérivée est bornée.

13 Cet exercice fait suite au précédent.

Une fonction f est dite contractante si elle est K-lipschitzienne pour un réel $K \in [0, 1[$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction contractante.

a. Soit $g = f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f(0) - K|x| - x \leqslant g(x) \leqslant f(0) + K|x| - x$$
En déduire les limites de g en $\pm\infty$

b. Démontrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$.

c. Démontrer que ce point fixe est unique.

d. Soit (u_n) une suite telle :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$
Démonter que cette suite converge vers le point fixe de f.

14 Soit a, b deux réels tels que $a < b$.

a. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue. Démontrer que f possède un point fixe.

b. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.
Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que :
$$5f(c) = 2f(a) + 3f(b)$$

15 Démontrer que :

a. Il existe une infinité de réels x tels que $\tan x = x$.

b. Il existe une infinité de réels x tels que $\cos x = e^x$.

16 Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $f(0) = f(1)$.

a. Démontrer qu'il existe $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que :
$$f(\alpha + \tfrac{1}{2}) = f(\alpha)$$

b. Démontrer qu'il existe $\beta \in [0, \frac{2}{3}]$ tel que :
$$f(\beta + \tfrac{1}{3}) = f(\beta)$$

17 Un randonneur a parcouru 20 km en 5 heures.

a. Démontrer qu'il existe un intervalle d'une heure pendant lequel il a parcouru exactement 4 km.

b. Le randonneur prétend que sur n'importe quel intervalle de deux heures il a parcouru 10 km. Est-ce possible ?

18 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue non constante telle que $f(a) = f(b)$.

Soit y un élément non extremum de $f([a, b])$.

Démontrer que y admet au moins deux antécédents par f.

19 Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que f est bornée et g est continue.

Démontrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

20 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue et périodique.

a. Démontrer que f est bornée.

b. On suppose que f admet une limite en $+\infty$.
Que dire de f ?
Indication : utiliser une suite.

21 Soient f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que $f > g$.

a. Démontrer qu'il existe un réel a strictement positif tel que :
$$\forall x \in [0, 1] \qquad f(x) \geqslant g(x) + a$$

b. Montrer que ce résultat est faux si on remplace $[0, 1]$ par $]0, 1]$.

22 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a. Démontrer que si $f(0) < 0$ et f admet une limite strictement positive en $+\infty$ alors il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(c) = 0$.

b. Démontrer que si f tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$ alors f admet un minimum.

c. Démontrer que si f tend vers 0 en $\pm\infty$ et f prend au moins une valeur strictement positive et une valeur strictement négative alors f est bornée et atteint ses bornes.

23 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$$
Démontrer que f est bijective.

24 Soit a, b, c, d quatre réels tels que $a < b$ et $c < d$. Soit $f : [a, b] \to [c, d]$ croissante et surjective.

Démontrer que f est continue.

On pourra utiliser la théorème de la limite monotone.