Chapitre B7
Polynômes

Dans tout ce chapitre on note $\mathbb{K}$ pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Définitions

A. L'anneau $\mathbb{K}[X]$

Définition. Soit X une indéterminée. Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une somme

où n est un entier naturel et a_0, $a_1, \dots, a_n$ sont des scalaires (*i.e.,* de éléments de $\mathbb{K}$).

On note parfois :

en gardant bien en tête qu'à partir d'un certain rang les a_k sont tous nuls.

Proposition. *(Admise) Deux polynômes $P = \sum_k a_k X^k$ et $Q = \sum_k b_k X^k$ sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux.*

$$P = Q \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad a_k = b_k$$

Notation. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définitions (Opérations usuelles). Soit $P = \sum_k a_k X^k$ et $Q = \sum_k b_k X^k$ deux polynômes. On définit les opérations :

- Addition : $P + Q = \sum_k (a_k + b_k) X^k$
- Multiplication : $PQ = \sum_k c_k X^k$ avec :

- Multiplication par un scalaire : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ $\lambda P = \sum_k (\lambda a_k) X^k$
- Composition : $P \circ Q = P(Q(X))$

Définitions. Un polynôme est dit constant si tous ses termes a_k sont nuls sauf éventuellement a_0. L'ensemble des polynômes constants est naturellement identifié à $\mathbb{K}$, ce qui justifie l'inclusion $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}[X]$.

Le polynôme nul est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls. Il est noté 0 ou $0_{\mathbb{K}[X]}$.

Proposition. *Le triplet $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau.*

Son élément nul est le polynôme nul.

L'opposé du polynôme $P = \sum_k a_k X^k$ est le polynôme $-P = \sum_k (-a_k) X^k$.

L'élément unité est le polynôme constant égal à 1.

Ses éléments inversibles sont les polynômes constants non-nuls : $\mathbb{K}[X]^* = \mathbb{K}^*$.

B. Degré

Définitions. Soit $P = \sum_k a_k X^k$ un polynôme non-nul. On appelle degré de P et on note $\deg P$ le plus grand entier k tel que a_k est non nul.

Si P est de degré n alors :

Dans ce cas le coefficient a_n est appelé coefficient dominant de P.

Si de plus $a_n = 1$ alors on dit que P est un polynôme unitaire.

On convient que le polynôme nul est de degré $-\infty$.

Notation. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré *inférieur ou égal* à n :

Exemples.

(i) $\mathbb{K}_2[X] =$

(ii) $\mathbb{K}_0[X] =$

(iii) Si $n \leqslant m$ alors

Proposition. *Pour tous polynômes P et Q :*

$\deg(P+Q)$ $\deg(PQ)$

Remarque. On convient que $n + (-\infty) = -\infty$ et que $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, ainsi la propriété est valable également si l'un des deux polynômes P et Q est nul.

Démonstration. Si P ou Q est le polynôme nul la propriété se vérifie facilement.

Supposons que P et Q sont non-nuls. Soit $n = \deg P$ et $m = \deg Q$. Quitte à intervertir les deux polynômes on suppose que $n \geqslant m$. On note :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad \text{et} \qquad Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$$

avec $a_n \neq 0$, et si $m < n$ alors $b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = b_n = 0$. Alors :

$$P + Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k$$

donc le degré de $P + Q$ est bien inférieur ou égal à n.

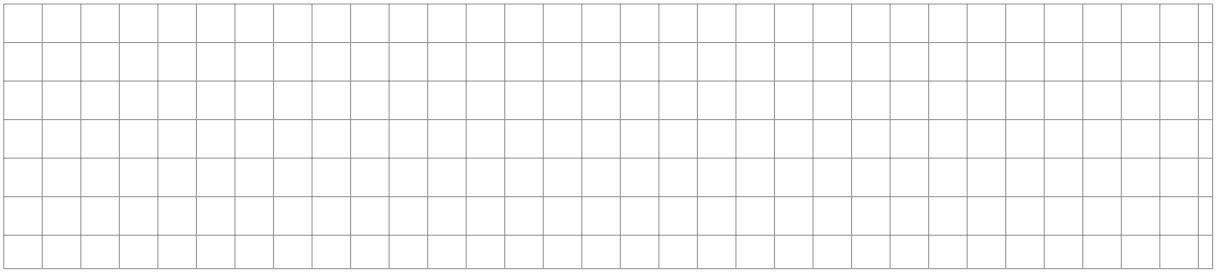
De plus :

- Si m est strictement inférieur à n alors le coefficient de degré n de $P + Q$ est a_n, il est non-nul, donc $P + Q$ est de degré n.
- Si $m = n$ alors le degré de $P + Q$ peut être strictement inférieur à n.

Pour la multiplication on utilise la formule :

$$PQ = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) X^k$$

On écrit une condition nécessaire pour que le coefficient de X^k soit non-nul :



Ainsi le coefficient de X^k est nul si $k > m + n$, ce qui montre que le degré de PQ est inférieur ou égal à $m + n$.

Si $k = m + n$, alors le coefficient de degré k de PQ est $a_n b_m$.

Ce coefficient est non-nul donc le degré de PQ est $n + m$ comme annoncé. □

Proposition. *L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre. Autrement dit, pour tous polynômes P et Q :*

$$PQ = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad P = 0 \quad \textit{ou} \quad Q = 0$$

Démonstration. On démontre la contraposée :

$$P \neq 0 \quad \text{et} \quad Q \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad PQ \neq 0$$

En effet, si P et Q sont non-nuls alors ils sont de degrés positifs, et comme $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$ alors PQ est de degré positif et donc PQ est non-nul. □

C. Spécialisation

Définition. Soit P un polynôme et α un scalaire (*i.e.,* $\alpha \in \mathbb{K}$).
On note $P(\alpha)$ le scalaire obtenu en remplaçant X par α dans l'expression de P :

$$\text{Si} \qquad P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad \text{alors} \qquad P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$$

On dit que $P(\alpha)$ est la spécialisation ou l'évaluation de P en α.

Remarque. On peut noter P ou $P(X)$ pour un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$.
Par contre si $\alpha \in \mathbb{K}$ alors $P(\alpha) \in \mathbb{K}$.

Proposition. *La spécialisation est compatible avec l'addition, la multiplication par un scalaire et la multiplication :*

$$\begin{aligned}
&\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2 && (P+Q)(\alpha) = P(\alpha) + Q(\alpha) \\
&\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} && (\lambda P)(\alpha) = \lambda\, P(\alpha) \\
&\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2 && (PQ)(\alpha) = P(\alpha)Q(\alpha)
\end{aligned}$$

Définition. Une fonction polynomiale est une fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ de la forme $x \mapsto P(x)$ où P est un polynôme.

Remarque. On note en général $\mathbb{K}[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. C'est un sous-anneau de $\mathcal{F}(\mathbb{K})$.

L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[x] \\ P & \longmapsto & (x \mapsto P(x)) \end{array}$ est un morphisme d'anneaux.

D. Divisibilité

Définition. Si A, B deux polynômes. On dit que B divise A, et que A est un multiple de B s'il existe un polynôme C tel que $A = BC$.

Notation. Si B divise A alors on note $B \mid A$.

Exemple 1.

(i) $X - 4$ divise $X^2 - 3X - 4$

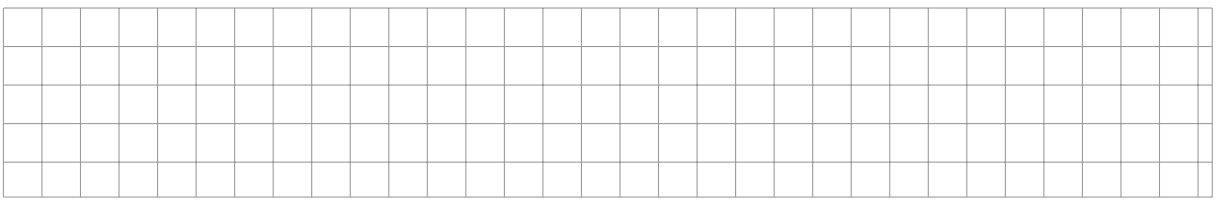
(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X - 2$ divise $X^n - 2^n$

(iii) X^2 divise $5X^6 + 7X^5 - 3X^3 + 2X^2$

(iv) $2X - 3$ divise $X - \frac{3}{2}$

(v) $X^3 - 3X^2 + 6X + 7$ ne divise pas $2X^2 - X + 10$.

Remarque. Si B divise A et A est non-nul alors $\deg B \leqslant \deg A$.



Propositions.

(i) Si B divise A et A' alors B divise $(A + A')$.

(ii) Si C divise B et B divise A alors C divise A.

(iii) Le polynôme nul est multiple de tous les polynômes, le polynôme unité divise tous les polynômes.

Remarques.

(i) Si P est un polynôme et λ un scalaire non-nul alors P divise λP, et λP divise P, car $P = \frac{1}{\lambda}(\lambda P)$.

(ii) La relation de divisibilité n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{K}[X]$. Elle est réflexive, transitive, mais pas antisymétrique.

Par exemple $X^2 + 3$ divise $2X^2 + 6$ et $2X^2 + 6$ divise $X^2 + 3$ alors que ces deux polynômes ne sont pas égaux.

Définition. Deux polynômes P et Q sont dits associés si P divise Q et Q divise P.

Proposition. *Deux polynômes P et Q sont associés si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda P$.*

Démonstration.

Théorème - Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$. *Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec B non-nul. Alors il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :*

- $A = BQ + R$
- $\deg R < \deg B$

Les polynômes Q et R sont appelés respectivement quotient et reste de la division euclidienne de A par B.

Démonstration de l'existence. On fixe le polynôme B et on note p son degré. Comme B est non-nul alors p est un entier naturel. On considère la proposition :

$\mathcal{P}_n$: Pour tout polynôme A de degré n il existe un couple (Q, R) de polynômes tels que $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$.

On démontre par *récurrence forte* que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$.

Initialisation. La propriété $\mathcal{P}_{-\infty}$ est vraie car si $A = 0$ alors il suffit de poser $Q = R = 0$: ceci donne bien $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$.

Hérédité. Nous démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}_{-\infty}$, $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1 \dots \mathcal{P}_{n-1}$ sont vraies, alors $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que les propriétés $\mathcal{P}_{-\infty}$, $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1 \dots \mathcal{P}_{n-1}$ sont vraies. Soit A un polynôme de degré n. On note

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad \text{et} \qquad B = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$$

avec a_n et b_p non-nuls.

Si $n < p$ alors on pose $Q = 0$ et $R = A$, ce qui donne bien $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$.

Supposons maintenant que $n \geqslant p$. Soit $Q_1 = \frac{a_n}{b_p} X^{n-p}$. Alors

$$Q_1 B = a_n X^n + \frac{a_n}{b_p} b_{p-1} X^{n-1} + \cdots$$

donc $A - Q_1 B$ est de degré strictement inférieur à n. Notons m ce degré.

On applique la proposition $\mathcal{P}_m$, qui est supposée vraie par hypothèse de récurrence :

Il existe des polynômes Q_2 et R tels que $A - Q_1 B = Q_2 B + R$ et $\deg R < \deg B$. En posant $Q = Q_1 + Q_2$ on obtient qu'il existe bien deux polynômes Q et R tels que $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$.

Ceci démontre que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie. L'hérédité est établie.

Conclusion. Par récurrence forte la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$.

En d'autres termes, pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$ il existe des polynômes Q et R satisfaisant les conditions demandées.

Démonstration de l'unicité.

Méthode. On pose la division comme pour les entiers.

Exemple 2. Calcul de la division euclidienne de A par B où :

(i)	$A = X^5 - X^4 - X^3 + 8X^2 - 2$	$B = X^2 - X + 2$
(ii)	$A = 2X^5 + 3X^4 - 4X^3 - X^2 + 4X + 1$	$B = X^3 + 2X^2 - 1$

▷ **Exercice 1.**

E. Représentation informatique

Remarque. On peut considérer qu'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite finie de scalaires $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, ou de façon équivalente une suite $(a_0, a_1, \ldots)$ nulle à partir d'un certain rang.

On dit plutôt qu'une suite est presque nulle si elle est nulle sauf pour un nombre fini d'indices.

Alors les éléments de $\mathbb{K}$ sont les suites $(a_0, 0, 0, \ldots)$, l'indéterminée est $X = (0, 1, 0, 0, \ldots)$.

L'addition est définie par :

$$(a_0, a_1, \ldots) + (b_0, b_1, \ldots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots)$$

La multiplication est définie par :

$$\begin{aligned}(a_0, a_1, \ldots) \times (b_0, b_1, \ldots) &= (a_0 b_0, a_1 b_0 + a_0 b_1, \ldots) \\ &= (c_0, c_1, \ldots) \qquad \text{avec} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\end{aligned}$$

On vérifie que l'ensemble des suites presque nulles muni de ces deux opérations est un anneau, et comme on a noté $X = (0, 1, 0, \ldots)$ alors on a exactement :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)$$

On définit aussi la multiplication par un scalaire :

$$\lambda(a_0, a_1, \ldots) = (\lambda a_0, \lambda a_1, \ldots)$$

Cette notation est en fait une définition alternative des polynômes, qui explique la notion d'indéterminée : c'est un objet différent des scalaires.

En Python on peut définir des suites de scalaires (de flottants en l'occurrence).
Par exemple le polynôme $P = X^3 - 5X^2 + 7$ est représenté par la liste `P=[7, 0, -5, 1]`, éventuellement avec des zéros à la suite, comme `P=[7, 0, -5, 1, 0, 0]`.
On peut alors définir des fonctions de calcul de :

- Degré d'un polynôme
- Somme, produit de deux polynômes
- Produit d'un polynôme par un scalaire
- Spécialisation d'un polynôme en un scalaire
- Division euclidienne d'un polynôme non-nul (il suffit de suivre l'algorithme donné par la démonstration de l'existence du couple (Q, R))
- PGCD de deux polynômes
- etc.

Voici quatre telles fonctions.

```
def deg(P):
    """Calcul du degré de P.
       Renvoie -1 si P est nul."""
    n=len(P)-1
    while n>=0 and P[n]==0:
        n=n-1
    return n
```

```
def Somme(P,Q):
    """Renvoie la somme P+Q"""
    m,n=deg(P),deg(Q)
    S=[0]*max(m,n)
    for k in range(m):
        S[k]=S[k]+P[k]
    for k in range(n):
        S[k]=S[k]+Q[k]
    return S
```

```
def Produit(P,Q):
    """Renvoie le produit PQ"""
    m,n=deg(P),deg(Q)
    R=[0]*(m+n)
    for k in range(m+n):
        for i in range(m):
            if k-n<=i<=k:
                R[k]=R[k]+P[i]*Q[k-i]
    return R
```

```
def Specialisation(P,a):
    """Calcule P(a)"""
    y=0
    for k in range(len(P)):
        y=y+P[k]*a**k
    return y
```

Pour l'évaluation l'algorithme de Hörner est plus efficace. Il utilise la formule :

$$\forall x \in \mathbb{K} \qquad P(x) = (\cdots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_0)$$

▷ **Exercice 2.**

II. Dérivation

A. Dérivée formelle

Définition. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme. On appelle polynôme dérivé de P et on note P' le polynôme défini par :

Remarque. Si f est la fonction polynomiale de polynôme P, alors la fonction polynomiale associée à P' est la dérivée de f au sens usuel. En conséquence la dérivation des polynômes hérite des propriétés de la dérivation des fonctions :

Pour tous polynômes P et Q et tout scalaire λ :

- $(P+Q)' = P' + Q'$
- $(\lambda P)' = \lambda P'$
- $(PQ)' = P'Q + PQ'$
- $P' = Q' \iff \exists k \in \mathbb{K} \quad P = Q + k$

Proposition. *Pour tout polynôme* P non constant *:* $\deg(P') = \deg(P) - 1$

B. Dérivées k-èmes

Proposition. *Soit* $P = X^n$ *où* $n \in \mathbb{N}$. *Alors pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *:*

$P^{(k)} =$

Démonstration. On commence par démontrer par récurrence finie sur k que cette propriété est vraie pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

Proposition - Formule de Leibniz. *Soit A et B deux polynômes. Alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (AB)^{(n)} =$$

Exemple. Premiers dérivés successifs du produit AB :

$$(AB)^{(0)} = AB$$

$$(AB)^{(1)} = A'B + AB'$$

$$(AB)^{(2)} =$$

$$(AB)^{(3)} =$$

Démonstration. On démontre cette formule par récurrence sur n, comme pour la formule du binôme de Newton. □

▷ **Exercice 3.**

Exemple (en vue de la formule de Taylor). Valeurs en 0 des dérivés successifs de P, où $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$.

Théorème - Formule de Taylor. *Soit P un polynôme de degré n et a un scalaire. Alors :*

Démonstration. Si P est le polynôme nul alors la formule s'écrit $P = 0$, elle est juste.

Pour les autres cas on note $\mathcal{P}_n$ la propriété : la formule de Taylor est vraie pour tout polynôme de degré n.

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Si P est de degré nul alors P est constant. La formule s'écrit $P = P^{(0)}(a)$, elle est exacte.

Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie, c'est-à-dire que la formule est validée pour tout polynôme de degré $n-1$.

On considère un polynôme P de degré n et on pose : $\quad Q = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$

La dérivée de Q est :

De plus, comme P' est de degré $n-1$ alors par hypothèse de récurrence la formule est valide pour P', ce qui donne :

Comme $P'^{(k)} = P^{(k+1)}$ pour tout entier k alors $Q' = P'$.

Ceci implique qu'il existe une constante $c \in \mathbb{K}$ telle que $Q = P + c$. Or $Q(a) = P(a)$, donc $c = 0$ et la formule est valide pour P.

L'hérédité est démontrée.

Conclusion. Par récurrence, la formule de Taylor est vraie pour tout polynôme. □

Remarque. Pour tout polynôme P : $\quad P^0 = 1$

Ceci montre que la spécialisation de $(X-a)^0$ en a est égale à 1.

Exemple 3. Application de la formule pour $P = X^3 + 2X - 5$ et $a = 1$.

▷ **Exercice 4.**

III. Racines

A. Définition

Définition. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Une racine (ou un zéro) de P est un scalaire α tel que $P(\alpha) = 0$.

Exemples.

- Le polynôme $X + 3$ de $\mathbb{K}[X]$ a une racine : -3
- Le polynôme $X^2 + 1$ de $\mathbb{C}[X]$ a deux racines : i et $-i$
- Le polynôme $X^2 + 1$ de $\mathbb{R}[X]$ n'a pas de racine.
- Le polynôme 5 n'a pas de racine.
- Le polynôme nul a une infinité de racines : tous les éléments de $\mathbb{K}$.

Théorème. *Soit P un élément de $\mathbb{K}[X]$ et α un élément de $\mathbb{K}$.*
Alors α est racine de P si et seulement si $(X - \alpha)$ divise P.

Démonstration.

Exemple 4. Résoudre : $3x^3 - 5x^2 + 2 = 0$

▷ **Exercice 5.**

Corollaire. *Soit P un polynôme et $k \in \mathbb{N}^*$.*

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont k racines distinctes de P alors le polynôme $\prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)$ divise P.

Démonstration. On note $\mathcal{P}_k$ cette propriété et on démontre par récurrence qu'elle est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

Initialisation. Le théorème précédent donne la propriété $\mathcal{P}_1$.

Hérédité. Supposons que pour un certain entier $k \geqslant 2$ la propriété $\mathcal{P}_{k-1}$ est vraie, démontrons qu'alors la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie.

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des racines distinctes de P. Alors $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ sont des racines distinctes de P, donc d'après la propriété $\mathcal{P}_{k-1}$ (qui est vraie par hypothèse de récurrence) le polynôme $\prod_{i=1}^{k-1}(X-\alpha_i)$ divise P, *i.e.,* il existe un polynôme Q tel que :

$$P = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_{k-1})Q$$

Mais α_k est racine de P, donc en spécialisant en $X = \alpha_k$ dans l'égalité ci-dessus on obtient :

$$0 = (\alpha_k-\alpha_1)\cdots(\alpha_k-\alpha_{k-1})Q(\alpha_k)$$

Comme les α_i sont tous distincts alors les $\alpha_i - \alpha_k$ ne sont pas nuls. On en déduit que $Q(\alpha_k) = 0$, donc α_k est une racine de Q.

D'après le théorème ci-dessus il existe un polynôme Q_1 tel que $Q = (X-\alpha_k)Q_1$, ce qui donne :

$$P = (X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_{k-1})(X-\alpha_k)Q_1$$

On a donc démontré que la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie. L'hérédité est établie.

Conclusion. Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout entier non-nul k. □

Corollaire. *Soit n un entier naturel. Un polynôme de degré n possède au plus n racines distinctes.*

Démonstration. Soit P un polynôme de degré n, et soit $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ un ensemble de m racines distinctes de P. Alors d'après le corollaire précédent il existe un polynôme Q tel que :

$$P = \left(\prod_{i=1}^{m}(X-\alpha_i)\right)Q$$

Comme P est de degré $n \in \mathbb{N}$ alors P est non-nul, puis Q est non-nul. On déduit de l'égalité ci-dessus :

$$n = \deg P = \deg\left(\prod_{i=1}^{m}(X-\alpha_i)\right) + \deg Q = m + \deg Q$$

Le degré de Q est positif, donc $n \geqslant m$.

Ainsi P ne peut avoir plus de n racines distinctes. □

Corollaires. *Soit n un entier naturel.*

(i) *Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n.*
Si P possède $n+1$ racines distinctes alors $P = 0$.

(ii) *Soit P et Q deux polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n. S'il existe $n+1$ scalaires distincts $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tels que pour tout $i = 0, \dots, n$ on a $P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$ alors $P = Q$.*

(iii) *Soit $f, g : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ deux fonctions polynomiales de degrés inférieurs ou égaux à n.*
Si f et g sont égales en au moins $n+1$ scalaires distincts alors f et g sont égales.
En d'autres termes une fonction polynomiale de degré au plus n est uniquement déterminée par $n+1$ de ses valeurs.

Démonstration.

(i) On suppose que P est de degré au plus n et qu'il possède $n+1$ racines.

Si P est non-nul alors il est de degré m avec $0 \leqslant m \leqslant n$, donc il possède au plus n racines, d'après le corollaire précédent.

Or P possède au moins $n+1$ racines, donc il est nul.

(ii) On applique le point *(i)* au polynôme $P - Q$.

Ce polynôme est de degré au plus n, les α_i en sont racines, donc il possède au moins $n+1$ racines, et donc il est nul. Ainsi $P = Q$.

(iii) Ce point est conséquence immédiate du précédent. □

Remarque. Notons $\mathbb{K}[x]$ l'ensemble des fonctions poynomiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$.
D'après le point *(iii)* l'application $\mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[x]$, $P \longmapsto \begin{pmatrix} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto P(x) \end{pmatrix}$ est injective.
Elle est surjective par définition d'une fonction polynomiale, donc elle est bijective.
On peut ajouter que c'est un isomorphisme d'anneau.

B. Ordre de multiplicité d'une racine

Définition. Soit P un polynôme non-nul et α une racine de P.
L'ordre de multiplicité de α dans P est le plus grand entier k tel que $(X-\alpha)^k$ divise P.
De façon équivalente, c'est l'entier naturel k tel que $(X-\alpha)^k$ divise P et $(X-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas P.

Remarque. Il existe alors un polynôme Q tel que $P = (X-\alpha)^k Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

Exemple 5.

(i) Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme du second degré. Si son discriminant est non-nul alors il possède deux racines de multiplicité 1, sinon il possède une racine de multiplicité 2.

(ii) Quelles sont les racines de $X^3 - X^2 - X + 1$ et quelles sont leurs multiplicités ?

(iii) Quelles sont les racines de $4X^{28} - X^{26}$ et quelles sont leurs multiplicités ?

Théorème. *Soit P un polynôme, α un scalaire, et k un entier naturel. Alors α est racine de P de multiplicité k si et seulement si α est racine de P, P', P'', $\dots$, $P^{(k-1)}$, mais pas de $P^{(k)}$.*

Remarque. Un scalaire α est racine d'un polynôme P de multiplicité 0 si et seulement si $P(\alpha) \neq 0$.

Exemple 6. Soit $P = X^4 + 2X^3 - 12X^2 - 40X - 32$.

Chercher une racine évidente de P, déterminer son ordre de multiplicité et en déduire sa factorisation.

▷ **Exercice 6.**

Exemple 7. Démonstration dans le cas où $k = 3$.

Démonstration du sens direct. Supposons que α est racine de P d'ordre de multiplicité k. Ceci signifie qu'il existe un polynôme Q tel que :

$$P = (X-\alpha)^k Q \qquad \text{et} \qquad Q(\alpha) \neq 0$$

Notons $A = (X-\alpha)^k$. Les dérivés successifs de A sont :

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad A^{(p)} = \begin{cases} \frac{k!}{(k-p)!}(X-\alpha)^{k-p} & \text{si } 0 \leqslant p \leqslant k \\ 0 & \text{si } p > k \end{cases}$$

Comme $P = AQ$ alors par application de la formule de Leibniz :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} A^{(p)} Q^{(n-p)}$$

Démontrons que α est racine de $P^{(0)} \dots P^{(k-1)}$.

Si $0 \leqslant n \leqslant k-1$ alors tout p allant de 0 à n vérifie $p \leqslant k-1$, ce qui donne $1 \leqslant k-p$ puis :

$$A^{(p)} = \frac{k!}{(k-p)!}(X-\alpha)^{k-p} \qquad \text{et} \qquad A^{(p)}(\alpha) = 0$$

Ainsi

$$P^{(n)}(\alpha) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} A^{(p)}(\alpha) Q^{(n-p)}(\alpha) = 0$$

On a démontré que α est racine de $P^{(n)}$, ceci pour tout n compris entre 0 et $k-1$.

Posons maintenant $n = k$. On a vu que si p est compris entre 0 et $k-1$ alors $A^{(p)}(\alpha) = 0$, donc :

$$P^{(k)}(\alpha) = A^{(k)}(\alpha) Q^{(k-k)}(\alpha) = k! Q(\alpha)$$

Or $Q(\alpha) \neq 0$ donc α n'est pas racine de $P^{(k)}$.

Démonstration du sens indirect.

C. Relations entre coefficients et racines

Remarque. Soit $P = a_n X^n + \cdots + a_0$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ses racines, éventuellement complexes, non obligatoirement distinctes. On sait alors que :

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = a_n (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n) \qquad (\dagger)$$

En développant le second terme et en identifiant on obtient l'expression des coefficients de P en fonction de ses racines.

Exemple 8.

(i) Pour $n = 2$ on obtient :

(ii) Pour $n = 3$ on obtient :

Proposition (formules de Viète : somme et produit des racines).
Avec les notations de la remarque ci-dessus :

Démonstration. Il suffit de considérer l'égalité (†). □

Exemple 9.
La somme des racines n-èmes de l'unité est nulle si $n > 1$, leur produit vaut $(-1)^{n-1}$.

Exemple 10. Résoudre les systèmes :

$$(i)\ \begin{cases} x+y=7 \\ xy=10 \end{cases} \qquad (ii)\ \begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$$

▷ **Exercices 7, 8.**

Proposition (cas général). *Avec les notations précédentes :*

Démonstration. Ces formules proviennent du développement de l'égalité (†). □

IV. Factorisation d'un polynôme

A. Polynômes scindés

Définition. Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit scindé s'il est produit de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ du premier degré.

Remarques.

(i) Un polynôme est donc scindé si et seulement si il peut s'écrire

$$P = \lambda(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_n)$$

avec $n = \deg P$ et $\lambda, \beta_1, \ldots, \beta_n$ éléments de $\mathbb{K}$, les β_i n'étant pas obligatoirement distincts.

(ii) Autre caractérisation : un polynôme de degré n est scindé si et seulement si il admet n racines, comptées avec leurs multiplicités.

Exemple 11. Dans $\mathbb{R}[X]$: X^2+1 n'est pas scindé
X^2-1 est scindé.
Dans $\mathbb{C}[X]$: X^2+1 et X^2-1 sont scindés.

B. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème fondamental de l'algèbre ou **Théorème de d'Alembert-Gauss.**
Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède une racine.

Corollaire. *Soit P un polynôme de degré n de $\mathbb{C}[X]$. Alors il existe des complexes λ, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tels que :*

$$P = \lambda(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_n)$$

Remarque. En d'autres termes, tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

Démonstration. Admise. □

Remarque. On dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. Ce n'est pas le cas de $\mathbb{R}$ ni de $\mathbb{Q}$.
Par exemple le polynôme X^2+1 n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$ ni dans $\mathbb{R}$.
Le polynôme X^2-2 a des racines dans $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{Q}$.

▷ **Exercice 9.**

Proposition. *Soit P un polynôme de degré n. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ses racines complexes, et $m_1, \dots, m_r$ leurs ordres de multiplicité respectifs.*
Alors $n = m_1 + \cdots + m_r$.

Démonstration. En effet il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$P = \lambda(X-\alpha_1)^{m_1} \cdots (X-\alpha_r)^{m_r}$$ □

C. Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Exemple 12. Le polynôme X^4+1 est-il scindé dans $\mathbb{R}[X]$? Est-il possible de le factoriser dans $\mathbb{R}[X]$?

Remarque. Tout polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ admet une racine, éventuellement complexe. En effet, si P est élément de $\mathbb{R}[X]$, alors P est en particulier élément de $\mathbb{C}[X]$, donc d'après le théorème de d'Alembert-Gauss il admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Proposition. *Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et α une racine de P, éventuellement complexe. Alors $\bar{\alpha}$ est racine de P.*

Démonstration.

Proposition (suite). *Si α est de multiplicité k alors $\bar{\alpha}$ est de multiplicité k.*

Démonstration. Par théorème, si α est racine de P d'ordre de multiplicité k alors :

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \qquad \text{et} \qquad P^{(k)}(\alpha) \neq 0$$

Les $P^{(n)}$ sont réels donc par conjugaison :

$$P(\bar{\alpha}) = P'(\bar{\alpha}) = \cdots = P^{(k-1)}(\bar{\alpha}) = 0 \qquad \text{et} \qquad P^{(k)}(\bar{\alpha}) \neq 0$$

Ceci montre bien que $\bar{\alpha}$ est racine de P d'ordre de multiplicité k. □

Théorème. *Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 à discriminants strictement négatifs.*

Démonstration. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Alors P est élément de $\mathbb{C}[X]$, donc il est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. Parmi ses racines certaines sont réelles. Si une racine n'est pas réelle alors son conjugué est racine également.

On peut noter l'ensemble des racines par

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_r, \beta_1, \dots, \beta_s\}$$

où r et s sont des entiers naturels, les α_i sont des complexes non réels, et les β_j sont des réels.

On note ensuite k_i l'ordre de multiplicité de chaque α_i. Alors k_i est aussi l'ordre de multiplicité de chaque $\bar{\alpha}_i$, d'après la proposition précédente.

On note de plus ℓ_j l'ordre de multiplicité de chaque β_j, et enfin λ le coefficient dominant de P, qui est réel car P est élément de $\mathbb{R}[X]$.

On obtient :

Pour $i = 1 \dots r$ notons :

$$Q_i = (X - \alpha_i)(X - \bar{\alpha}_i)$$

La décomposition de P s'écrit alors :

$(\star)$

Or en développant Q_i on obtient :

Ainsi Q_i est un polynôme réel. Son discriminant est

$\Delta_i =$

Il est strictement négatif car α_i n'est pas réel.

La décomposition $(\star)$ est bien d'une décomposition en produit de polynômes de degré 1 et polynômes de degré 2 à discriminants strictement négatifs. □

Corollaire. *Tout polynôme de degré impair de $\mathbb{R}[X]$ possède une racine réelle.*

Démonstration. Si P est un polynôme sans racine réelle, alors d'après le théorème ci-dessus P est produit de polynômes de degré 2, donc son degré est pair. Ceci contredit l'hypothèse, donc P possède une racine réelle. □

Autre démonstration. Notons $P = a_n X^n + \cdots + a_0$ avec n impair et a_n non-nul. Alors :

$$P(x) \underset{(\pm\infty)}{\sim} a_n x^n$$

On en déduit :

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = (\operatorname{sgn} a_n)\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} P(x) = -(\operatorname{sgn} a_n)\infty$$

La fonction $x \mapsto P(x)$ est continue car elle est polynomiale, donc le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure que $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, donc que 0 admet un antécédent par cette fonction. Cet antécédent est racine de P, donc P admet une racine. □

V. Arithmétique des polynômes

A. PGCD

Notation. Pour tout polynôme A on note $\mathcal{D}(A)$ l'ensemble de diviseurs de A.

Remarque. Soit A et B deux polynômes non tous les deux nuls.

Alors l'ensemble $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ est non-vide car il contient le polynôme 1. L'ensemble R des degrés des éléments de $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ est une partie de $\mathbb{N}$ non-vide, car elle contient 0.

De plus tout diviseurs de A et de B est de degré inférieur aux degrés de A et de B s'ils sont non-nuls, donc l'ensemble R est majoré. Il contient donc un plus grand élément r.

Cet entier r est le degré d'un élément de $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$.

Ceci justifie la définition ci-dessous.

Définition. Soit A et B deux polynômes non tous les deux nuls. Un PGCD de A et B est un polynôme de degré maximal divisant A et B.

Remarque. Si D est un PGCD de A et de B alors tout polynôme associé à D, donc tout polynôme λD pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, est un PGCD de A et B.

Lemme. *Soit A, B, Q, R, quatre polynômes vérifiant $A = BQ + R$. Alors :*

$$\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(R)$$

Démonstration. Par double inclusion. □

Remarque. Étant donnés deux polynômes A et de B avec B non-nul on crée par récurrence finie une suite finie $(R_k)_{0 \leqslant k \leqslant n+1}$ de polynômes (avec $n \in \mathbb{N}$) de la façon suivante : $R_0 = A$, $R_1 = B$, puis pour $k \geqslant 0$ si R_{k+1} est non-nul alors le polynôme R_{k+2} est le reste de la division euclidienne de R_k par R_{k+1} :

$$R_k = Q_{k+1}R_{k+1} + R_{k+2} \qquad \deg R_{k+2} < \deg R_{k+1}$$

On a défini aussi la suite des quotients $(Q_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$.

La suite $(\deg R_k)_{1 \leqslant k}$ est une suite d'entiers naturels strictement décroissante donc elle est finie, ce qui montre que la suite $(R_k)_{k \geqslant 0}$ atteint le polynôme nul, auquel cas la construction s'arrête, et on note n l'indice du dernier polynôme R_k non-nul.

Ce dernier polynôme non-nul R_n est un PGCD de A et de B, car :

$$\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(R_n) \cap \mathcal{D}(R_{n+1}) = \mathcal{D}(R_n) \cap \mathcal{D}(0) = \mathcal{D}(R_n)$$

Ceci montre que l'algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD est valide.

Proposition. *Si D_1 et D_2 sont deux PGCD de A et de B alors ils sont associés.*

Il existe donc un unique PGCD de A et de B unitaire.

Démonstration. En effet, D_1 et D_2 sont deux diviseurs de degré maximal de R_n, donc ils sont associés à R_n. Il s'écrivent tous les deux λR_n pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Si le coefficient dominant de R_n est a alors a est non-nul. Le polynôme $D = \frac{1}{a}R_n$ est alors un PGCD unitaire de A et de B, et c'est le seul polynôme unitaire associé à R_n. □

Définition. Soit A et B deux polynômes non tous les deux nuls. Le PGCD de A et B est le polynôme unitaire de degré maximal divisant A et B. On le note $A \wedge B$.

De plus on convient que $0 \wedge 0 = 0$.

Exemple 13.

$$\left(10X^3 + 10X^2\right) \wedge \left(2X^2 + 4X + 2\right) =$$

Proposition. *Le PGCD de A et B est le plus grand commun diviseur de A et B au sens de la relation de divisibilité. C'est-à-dire que si un polynôme P divise A et B alors il divise leur PGCD.*

Démonstration. Ceci est conséquence de l'égalité $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A \wedge B)$. □

▷ **Exercice 10.**

B. Relation de Bézout

Proposition. *Soit A et B deux polynômes non tous les deux nuls. Alors il existe deux polynômes U et V tels que $AU + BV = A \wedge B$.*

Ces deux polynômes U et V sont appelé coefficients de Bézout du couple (A, B).

Démonstration. On utilise les Q_k et les R_k de l'algorithme d'Euclide. □

▷ **Exercice 11.**

Définition. Deux polynômes non tous les deux nuls sont dits premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.

Théorème de Bézout. *Deux polynômes A et B sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$.*

Démonstration. Le sens direct est conséquence de la propriété précédente. Pour le sens indirect on remarque que si $AU + BV = 1$ alors tout diviseur de A et de B divise 1. □

Proposition (Lemme de Gauss). *Soit A, B, C trois polynômes. Si A divise BC et A est premier avec B alors A divise C.*

Démonstration. On utilise la relation de Bézout : il existe U et V tels que $AU + BV = 1$, donc $C = ACU + BCV$. Si A divise BC alors A divise $ACU + BCV = C$. □

Proposition. *Soit A et B deux polynômes et D leur PGCD. Alors il existe deux polynômes A_1 et B_1 tel que :*

$$A = DA_1 \qquad B = DB_1 \qquad A_1 \wedge B_1 = 1$$

Démonstration. Laissée en exercice. □

C. PPCM

Remarque. Soit A et B deux polynômes non-nuls.

Alors l'ensemble des multiples non-nuls de A et de B est non-vide car il contient le polynôme AB. Donc L'ensemble des degrés de ses éléments est une partie de $\mathbb{N}$ non-vide. Elle admet donc un minimum.

Ainsi il existe un polynôme non-nul de degré minimal multiple de A et de B.

Définition. Soit A et B deux polynômes non-nuls. Un PPCM de A et B est un multiple non-nul de A et B de degré minimal.

Remarque. Si M est un PPCM de A et de B alors tout polynôme associé à M, donc tout polynôme λM pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, est un PPCM de A et B.

Proposition. *Un PPCM de A et B est un plus petit commun multiple de A et B au sens de la divisibilité, c'est-à-dire que si un polynôme P est un multiple de A et B alors P est un multiple de tous leurs PPCM.*

Démonstration. Soit M un PPCM de A et B. Soit P un multiple de A et B. Comme M est non-nul alors par division euclidienne il existe deux polynômes Q et R tels que $P = QM + R$ avec $\deg R < \deg M$.

Comme P et M sont multiples de A et B alors R est multiple de A et B. Comme son degré est strictement inférieur à celui de M qui est un multiple de A et B non-nul de degré minimal alors R est nul.

Ainsi M divise P. □

Proposition. *Si M_1 et M_2 sont deux PPCM de A et B alors ils sont associés.*

Il existe donc un unique PPCM de A et de B unitaire.

Démonstration. En effet, M_1 et M_2 sont deux PPCM de A et B donc ils sont multiples l'un de l'autre d'après la propriété précédente, et ils sont donc associés. □

Définition. Soit A et B deux polynômes non-nuls. Le PPCM de A et B est le polynôme non-nul unitaire de degré minimal multiple de A et B. On le note $A \vee B$.

De plus on convient que $A \vee 0 = 0$ pour tout polynôme A.

Remarques.

(i) On a démontré ci-dessus que :

(ii) En conséquence :

Lemme. *Soit A, B, C trois polynômes non-nuls avec C unitaire. Alors $(AC) \vee (BC) = (A \vee B)C$.*

▷ **Exercice 12.**

Proposition. *Soit A et B deux polynômes non-nuls.*

(i) Si A et B sont premiers entre eux alors $A \vee B$ est associé à AB.

(ii) Dans tous les cas $(A \wedge B)(A \vee B)$ est associé à AB.

Démonstration.

(i) Le produit AB est un multiple commun de A et B, donc il est multiple de leur PPCM.

Soit $M = A \vee B$. Comme M est multiple de A alors il existe un polynôme Q tel que $M = AQ$. Comme M est multiple de B alors B divise $M = AQ$, et comme A et B sont premiers entre eux alors d'après le lemme de Gauss P divise Q. Il existe donc un polynôme R tel que $Q = BR$. On a alors $M = ABR$, *i.e.,* M est multiple de AB.

Ainsi AB et $A \vee B$ sont associés.

(ii) Notons $D = A \wedge B$. Alors il existe A_1 et B_1 premiers entre eux tels que $A = DA_1$ et $B = DB_1$, et donc $A \vee B = (A_1 D) \vee (B_1 D)$.

D'après le lemme précédent, comme D est unitaire alors $A \vee B = (A_1 \vee B_1)D$, puis d'après le *(i)* comme A_1 et B_1 sont premiers entre eux alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $A \vee B = \lambda A_1 B_1 D$.

Enfin $(A \vee B)(A \wedge B) = \lambda A_1 B_1 D^2 = \lambda AB$. Comme λ est un scalaire non-nul alors $(A \wedge B)(A \vee B)$ est associé à AB. □

D. Extension à un nombre fini de polynômes

Proposition. *Soit $A_1, \dots, A_n$ une famille de n polynômes non tous nuls. Alors :*

(i) Il existe un et un seul polynôme D unitaire de degré maximal divisant tous les A_i.

(ii) De plus il existe des polynômes $U_1, \dots, U_n$ tels que

$$A_1 U_1 + \cdots + A_n U_n = D$$

(iii) Si un polynôme P divise tous les A_i alors P divise D.

Définition. Le polynôme D de la proposition ci-dessus est appelé PGCD des polynômes $A_1, \dots, A_n$. Il est noté :

$$D = A_1 \wedge \ldots \wedge A_n = \bigwedge_{i=1}^{n} A_i$$

Remarque. Cas extrêmes : $\displaystyle\bigwedge_{i=1}^{1} A_i = A_1$ $\displaystyle\bigwedge_{i=1}^{0} A_i = 0$

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) Les polynômes $A_1, \dots, A_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si :

(ii) Les polynômes $A_1, \dots, A_n$ sont premiers entre eux deux à deux si :

Remarque. Si les polynômes $A_1, \dots, A_n$ sont premiers entre eux deux à deux alors ils sont premiers entre eux dans leur ensemble. La réciproque est fausse. Par exemple :

E. Polynômes irréductibles

Définition. Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit irréductible si :

(i) $\deg P \geqslant 1$

(ii) Les seuls diviseurs de P sont les scalaires non-nuls et les polynômes associés à P.

Remarque. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ jouent le rôle des nombres premiers dans $\mathbb{Z}$.

Exemple 14.

(i) Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, le polynôme $P = X - \alpha$ est irréductible. En effet il est de degré 1, et si on écrit $P = AB$ alors A ou B est de degré 0, donc la seule écriture possible comme produit est $P = \lambda\Big(\frac{1}{\lambda}(X-\alpha)\Big)$.

(ii) Le polynôme $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$.

Les résultats de la partie IV permettent d'énoncer les propriétés suivantes :

Proposition. *Les polynômes irréductible de $\mathbb{C}[X]$ sont les $\lambda(X-\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, c'est-à-dire les polynômes de degré 1.*

Proposition. *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :*

(i) Les $\lambda(X-\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, c'est-à-dire les polynômes de degré 1.

(ii) Les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

Théorème. *Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ se décompose comme produit d'un élément de $\mathbb{K}^*$ et de facteurs irréductibles unitaires de $\mathbb{K}[X]$.*

Cette décomposition est unique à permutation des facteurs près.

Démonstration. Il reste à démontrer l'unicité. Pour ceci on remarque que l'ensemble des racines complexe d'un polynôme est uniquement déterminé, de même que la multiplicité des racines. Ceci justifie l'unicité de la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$.

L'unicité dans $\mathbb{R}[X]$ en est conséquence. □

Proposition. *Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Alors :*

(i) A divise B si et seulement si les racines complexes de A sont racines de B avec une multiplicité inférieure ou égale.

(ii) A et B sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine complexe commune dans $\mathbb{C}$.

Démonstration.

(i) On considère la décomposition en facteurs premiers de B dans $\mathbb{C}[X]$:

$$B = \lambda(X-\alpha_1)^{m_1}\dots(X-\alpha_r)^{m_r}$$

Avec r entier naturel, λ complexe non-nul, $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ complexes distincts, $m_1,\dots,m_r$ entiers naturels strictement positifs.

Si A divise B alors il existe un polynôme Q tel que $B = AQ$. Si α est une racine de A alors $A(\alpha) = 0$, donc $B(\alpha) = 0$ et α est racine de B. De même les racines de Q sont racines de B, donc A et Q admettent des décompositions dans $\mathbb{C}[X]$ de la forme :

$$A = \mu(X-\alpha_1)^{k_1}\dots(X-\alpha_r)^{k_r} \qquad \text{et} \qquad Q = \nu(X-\alpha_1)^{\ell_1}\dots(X-\alpha_r)^{\ell_r}$$

où les k_i et les ℓ_i sont des entiers naturel éventuellement nuls.

Comme $B = AQ$ alors pour tout $i = 1,\dots,r$: $m_i = k_i + \ell_i$ donc $k_i \leqslant m_i$.

(ii) On démontre la négation de l'équivalence : A et B ne sont pas premiers entre eux si et seulement s'ils ont au moins une racine complexe commune.

Notons $D = A \wedge B$. Alors A et B ne sont pas premiers entre eux si et seulement si D est de degré au moins 1, donc si et seulement si D admet au moins une racine complexe.

Si D admet une racine complexe α alors $(X-\alpha)$ divise D. Or D divise A et B donc $(X-\alpha)$ divise A et B, donc α est racine commune de A et de B.

Réciproquement si A et B admettent une racine commune α alors $(X-\alpha)$ divise A et B donc $(X-\alpha)$ divise D et ainsi D admet au moins une racine. □