

**Feuille de T. D. B7**  
**Polynômes**

————— **Exercices de cours** —————

① Calculer la division euclidienne de  $A$  par  $B$  dans les cas suivants :

- a.  $A = X^3 + 3X^2 + X - 3$        $B = X + 5$   
 b.  $A = 2X^4 + 4X^3 - 5X + 1$        $B = 2X^2 + 1$   
 c.  $A = 3X^2 + 6X + 5$        $B = iX + 1 + i$

② L'algorithme de Hörner évalue un polynôme de degré  $n$  en un scalaire  $x$  grâce à la formule :

$$P(x) = (\dots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots + a_0)$$

- a. Programmer l'algorithme de Hörner en Python.  
 b. Compter le nombre d'opérations nécessaires pour spécialiser un polynôme de degré  $n$  avec cet algorithme, puis avec l'algorithme naïf. Comparer ces deux méthodes.

③ Soit  $P = X^7(X - 3)^3$ .

Calculer  $P^{(9)}$  en utilisant la formule de Leibniz.

④ Appliquer la formule de Taylor pour :

- a.  $P = 2X^2 + 7X + 7$  en  $a = -2$   
 b.  $Q = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$  en  $a = 3$

Résoudre l'équation :  $Q(X) = 0$

⑤ Résoudre l'équation :

$$x^5 - x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 12x = 0$$

⑥ Factoriser :

$$P = 2X^6 + 7X^5 + X^4 - 14X^3 - 8X^2 + 7X + 5$$

Pour ceci, trouver deux racines évidentes et déterminer leurs ordres de multiplicité.

⑦ Résoudre le système :

$$\begin{cases} xy = 24 \\ x^2 + y^2 = 73 \end{cases}$$

⑧ En considérant le polynôme unitaire dont  $x, y, z$  sont les racines, résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xy + xz + yz = -16 \\ xyz = 20 \end{cases}$$

⑨ Factoriser le polynôme :

$$P = X^3 - (1 + 6i)X - (6 - 2i)$$

⑩ Calculer le PGCD de  $A$  et  $B$  dans les cas suivants :

- a.  $A = X + 2$        $B = 6X + 11$   
 b.  $A = 4X^2 - 1$        $B = 2X^2 + 5X - 3$   
 c.  $A = 2X^3 - X^2 - X - 3$        $B = 4X^2 + 4X - 15$   
 d.  $A = X^n - \alpha^n$        $B = (X - \alpha)^n$   
 avec  $(\alpha, n) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{N}^*$

⑪ Déterminer des coefficients de Bézout pour :

$$A = (X - 4)(X - 1) \quad \text{et} \quad B = (X - 2).$$

⑫ Soit  $A, B, C$  trois polynômes non-nuls avec  $C$  unitaire. Démontrer que  $(AC) \vee (BC) = (A \vee B)C$ .

————— **Travaux dirigés** —————

① Donner la forme développée du polynôme  $P$  puis la forme factorisée du polynôme  $Q$  avec :

$$P = (X^3 + X^2 + X + 1) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k$$

$$\text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \frac{1}{k+1} + \frac{n+2}{k+2} X \right) X^k$$

② Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  dans les cas suivants :

- a.  $A = X^6 + 1$        $B = X^3 + X^2 + X + 1$   
 b.  $A = 2X^4 - 11X^3 + 7X^2 + 6X - 2$   
      $B = 2X^2 - 5X + 2$   
 c.  $A = X^{20} - 2X^{15} + 3X^{10} - 4X^5 + 5$   
      $B = X^7 + X^2$   
 d.  $A = X^5 + iX^4$        $B = X^2 + 1$   
 e.  $A = 2X^3 - (1 + i)X^2 - iX - (1 - i)$   
      $B = iX + 1$

③ Soit  $n$  un entier naturel,  $\theta, a, b$  trois scalaires avec  $a \neq b$ .

Déterminer le reste de la division euclidienne de :

- a.  $X^n$  par  $(X - a)$ , puis par  $(X - a)(X - b)$ , puis par  $(X - a)^2$   
 b.  $((\sin \theta)X + \cos \theta)^n$  par  $X^2 + 1$   
 c.  $X^{2n} + X^n + 1$  par  $X^2 + X + 1$

**4** On définit la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 - 2x + 5}{x^2 + 6x + 13}$$

Grâce à la division euclidienne :

- Démontrer que  $f$  possède une asymptote en  $\pm\infty$  et en donner une équation.
- Calculer une primitive de  $f$ .

**5** Soit  $a, b$  deux réels et  $n$  un entier naturel. Soit  $R = PQ$  avec :

$$P = (X - a)^n \quad \text{et} \quad Q = (X - b)^n$$

- Donner  $P^{(k)}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
- Calculer  $R^{(n)}$ . Simplifier son expression dans le cas où  $a = b$ .

c. En déduire la valeur de :  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$

**6** On considère les polynômes :

$$A = X^9 - X^8 - 4X^7 + 7X^6 + X^5 - 10X^4 + 6X^3 + 3X^2 - 4X + 1$$

$$B = X^5 - X^4 - 2X^3 + 2X^2 + X - 1$$

Factoriser  $B$  et démontrer qu'il divise  $A$ .

**7** Déterminer un polynôme  $P$  de degré minimal tel que  $P + 10$  soit divisible par  $(X - 2)^2$  et  $P - 12$  soit divisible par  $(X + 2)^2$ .

**8** À quelle condition nécessaire et suffisante sur  $(\lambda, \mu)$  le polynôme  $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$  est-il divisible par  $(X + 2)^2$  ?

**9** Factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes suivants.

$$P_1 = (X^2 - X + 1)^2 + 1$$

$$P_2 = X^4 + X^2 - 6$$

$$P_3 = X^7 - 125X^4 - 16X^3 + 2000$$

$$P_4 = 2X^3 - 2X^2 - 9X - 9$$

$$P_5 = (X^2 + X - 4)^2 + (X - 7)^2$$

$$P_6 = X^5 - 4X^3 + 10X^2 - 13X + 6$$

**10** Factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes suivants.

$$P_1 = X^6 - 1$$

$$P_2 = X^3 + 1$$

$$P_3 = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

$$P_4 = X^4 + X^2 + 1$$

$$P_5 = X^8 - 1$$

**11** Soit  $n$  un entier strictement supérieur à 2 et :

$$P_n = X^n - nX + 1$$

- Démontrer que  $P_n$  n'a que des racines simples.
- Déterminer le nombre de ses racines réelles en fonction de  $n$ .

**12** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Démontrer que  $1 + X + X^n$  n'a que des racines simples.

**13** Déterminer tous les polynômes vérifiant :

- $P \circ P = P$
- $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$
- $P(X + 1) = P(X)$
- $(X + 3)P(X) = XP(X + 1)$
- $P'^2 = 4P$
- $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$

**14** Soit  $P$  un polynôme non-nul vérifiant l'égalité :

$$(E) : P(X^2) = P(X + 1)P(X).$$

- Démontrer que si  $\alpha$  est une racine de  $P$  alors  $\alpha^{2^n}$  est racine de  $P$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- Démontrer que toute racine non-nulle de  $P$  est de module 1.
- Démontrer que toute racine de  $P$  différente de 1 est élément de  $1 + \mathbb{U}$ .
- En déduire que seuls 0 et 1 peuvent être racines de  $P$ .
- En déduire l'ensemble des polynômes vérifiant l'égalité (E).

**15** Démontrer que, pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$  :

$$P(X + 1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(X)}{k!}$$

**16** Résoudre l'équation

$$x^3 - 8x^2 + 23x - 28 = 0$$

sachant que la somme de deux des solutions est égale à la troisième.

**17** Factoriser le polynôme

$$8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$$

sachant que ses racines sont en progression arithmétique.

**18** Soit  $a, b, c$  trois scalaires et  $\alpha, \beta, \gamma$  les trois racines du polynôme  $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ .

- Exprimer  $\alpha + \beta + \gamma$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$  et  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$  en fonction de  $a, b, c$ .
- Application : résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 29 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -29 \end{cases}$$

**19** Déterminer tous les réels  $x, y, z$  tels que :

$$x + y + z = xy + xz + yz = 3$$

**20** Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes.

- Démontrer que :  $A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = (A \wedge B)\mathbb{K}[X]$
- Soit  $C$  un autre polynôme. A-t-on :  $(AC) \wedge (BC) = (A \wedge B)C$  ?

**21** Soit  $m$  et  $n$  deux entiers naturels non-nuls, soit  $r$  le reste de la division euclidienne de  $n$  par  $m$ , et  $d = n \wedge m$ .

a. Soit  $A, B, C$  trois polynômes. On suppose qu'il existe un polynôme  $V$  tel que  $A + BV + C = 0$ . Démontrer que  $A \wedge B = B \wedge C$ .

b. Démontrer que  $X^m - 1$  divise  $X^n - X^r$ .

En déduire que  $X^r - 1$  est le reste de la division euclidienne de  $X^n - 1$  par  $X^m - 1$ .

c. Démontrer que :

$$(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = (X^m - 1) \wedge (X^r - 1)$$

$$\text{puis que } (X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = (X^d - 1).$$

**22** Soit  $m$  et  $n$  deux entiers naturels non-nuls, et  $d = m \wedge n$ .

a. Soit  $a$  un diviseur de  $n$ . Justifier que  $\mathbb{U}_a \subseteq \mathbb{U}_n$ .

b. Démontrer que  $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \mathbb{U}_d$ .

c. En déduire que  $(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = (X^d - 1)$ .

**23** Soit  $A_1, \dots, A_n$  une famille de polynômes premiers entre eux deux à deux. Pour tout  $k = 1, \dots, n$  on pose :

$$B_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n A_i$$

Démontrer que les polynômes  $B_1, \dots, B_n$  sont premiers entre eux dans leur ensemble.

### **24** Polynômes de Tchebychev

Soit  $(P_n)$  la suite de polynômes définie par  $P_0 = 1$ ,  $P_1 = X$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

a. Calculer  $P_n$  pour  $n$  compris entre 0 et 5.

b. Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le degré de  $P_n$ .

c. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(nx) = P_n(\cos x)$$

d. Quelles sont les racines du polynôme  $P_n$  ?

### **25** Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soit  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  trois scalaires distincts et :

$$P_0 = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$$

$$P_1 = (X - \alpha_0)(X - \alpha_2)$$

$$P_2 = (X - \alpha_0)(X - \alpha_1)$$

a. Calculer  $P_i(\alpha_j)$  pour tous  $i$  et  $j$  allant de 0 à 2.

Pour tout  $i = 0, 1, 2$  on pose :  $L_i = P_i/P_i(\alpha_i)$

b. Démontrer que pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{K}_2[X]$  :

$$P = \sum_{i=0}^2 P(\alpha_i)L_i$$

c. Soit  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  trois scalaires. Démontrer qu'il existe un et un seul polynôme de degré au plus 2 tel que pour tout  $i = 0, 1, 2$  :  $P(\alpha_i) = \beta_i$ .

d. Application : déterminer l'unique parabole passant par les points de coordonnées  $(-1, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(4, 11)$ .