Feuille de T. D. B7
Polynômes

Exercices de cours

(1) Calculer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

a. $A = X^3 + 3X^2 + X - 3$ $\quad B = X + 5$

b. $A = 2X^4 + 4X^3 - 5X + 1$ $\quad B = 2X^2 + 1$

c. $A = 3X^2 + 6X + 5$ $\quad B = iX + 1 + i$

(2) L'algorithme de Hörner évalue un polynôme de degré n en un scalaire x grâce à la formule :

$$P(x) = (\cdots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_0)$$

a. Programmer l'algorithme de Hörner en Python.

b. Compter le nombre d'opérations nécessaires pour spécialiser un polynôme de degré n avec cet algorithme, puis avec l'algorithme naïf. Comparer ces deux méthodes.

(3) Soit $P = X^7(X-3)^3$.

Calculer $P^{(9)}$ en utilisant la formule de Leibniz.

(4) Appliquer la formule de Taylor pour :

a. $P = 2X^2 + 7X + 7$ $\quad$ en $\quad a = -2$

b. $Q = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$ $\quad$ en $\quad a = 3$
Résoudre l'équation : $\quad Q(X) = 0$

(5) Résoudre l'équation :

$$x^5 - x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 12x = 0$$

(6) Factoriser :

$$P = 2X^6 + 7X^5 + X^4 - 14X^3 - 8X^2 + 7X + 5$$

Pour ceci, trouver deux racines évidentes et déterminer leurs ordres de multiplicité.

(7) Résoudre le système :

$$\begin{cases} xy &= 24 \\ x^2 + y^2 &= 73 \end{cases}$$

(8) En considérant le polynôme unitaire dont x, y, z sont les racines, résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xy + xz + yz = -16 \\ xyz = 20 \end{cases}$$

(9) Factoriser le polynôme :

$$P = X^3 - (1+6i)X - (6-2i)$$

(10) Calculer le PGCD de A et B dans les cas suivants :

a. $A = X + 2$ $\quad B = 6X + 11$

b. $A = 4X^2 - 1$ $\quad B = 2X^2 + 5X - 3$

c. $A = 2X^3 - X^2 - X - 3$ $\quad B = 4X^2 + 4X - 15$

d. $A = X^n - \alpha^n$ $\quad B = (X - \alpha)^n$
avec $\quad (\alpha, n) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{N}^*$

(11) Déterminer des coefficients de Bézout pour :

$$A = (X-4)(X-1) \quad \text{et} \quad B = (X-2).$$

(12) Soit A, B, C trois polynômes non-nuls avec C unitaire. Démontrer que $(AC) \vee (BC) = (A \vee B)C$.

Travaux dirigés

1 Donner la forme développée du polynôme P puis la forme factorisée du polynôme Q avec :

$$P = (X^3 + X^2 + X + 1)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k X^k$$

$$\text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}X^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\frac{n+2}{k+1}X^k$$

2 Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

a. $A = X^6 + 1$ $\quad B = X^3 + X^2 + X + 1$

b. $A = 2X^4 - 11X^3 + 7X^2 + 6X - 2$
$B = 2X^2 - 5X + 2$

c. $A = X^{20} - 2X^{15} + 3X^{10} - 4X^5 + 5$
$B = X^7 + X^2$

d. $A = X^5 + iX^4$ $\quad B = X^2 + 1$

e. $A = 2X^3 - (1+i)X^2 - iX - (1-i)$
$B = iX + 1$

3 Soit n un entier naturel, θ, a, b trois scalaires avec $a \neq b$.

Déterminer le reste de la division euclidienne de :

a. X^n par $(X-a)$, puis par $(X-a)(X-b)$, puis par $(X-a)^2$

b. $((\sin\theta)X + \cos\theta)^n$ par $X^2 + 1$

c. $X^{2n} + X^n + 1$ par $X^2 + X + 1$

4 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 - 2x + 5}{x^2 + 6x + 13}$$
Grâce à une division euclidienne :

a. Démontrer que f possède une asymptote en $\pm\infty$ et en donner une équation.

b. Calculer une primitive de f.

5 Soit a, b deux réels et n un entier naturel. Soit $R = PQ$ avec :
$$P = (X - a)^n \quad \text{et} \quad Q = (X - b)^n$$
a. Donner $P^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b. Calculer $R^{(n)}$. Simplifier son expression dans le cas où $a = b$.

c. En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

6 On considère les polynômes :
$$A = X^9 - X^8 - 4X^7 + 7X^6 + X^5 - 10X^4 + 6X^3 + 3X^2 - 4X + 1$$
$$B = X^5 - X^4 - 2X^3 + 2X^2 + X - 1$$
Factoriser B et démontrer qu'il divise A.

7 Déterminer un polynôme P de degré minimal tel que $P + 10$ soit divisible par $(X-2)^2$ et $P - 12$ soit divisible par $(X+2)^2$.

8 À quelle condition nécessaire et suffisante sur (λ,μ) le polynôme $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ est-il divisible par $(X+2)^2$?

9 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants.

$P_1 = (X^2 - X + 1)^2 + 1$
$P_2 = X^4 + X^2 - 6$
$P_3 = X^7 - 125X^4 - 16X^3 + 2000$
$P_4 = 2X^3 - 2X^2 - 9X - 9$
$P_5 = (X^2 + X - 4)^2 + (X - 7)^2$
$P_6 = X^5 - 4X^3 + 10X^2 - 13X + 6$

10 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants.

$P_1 = X^6 - 1$
$P_2 = X^3 + 1$
$P_3 = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$
$P_4 = X^4 + X^2 + 1$
$P_5 = X^8 - 1$

11 Soit n un entier strictement supérieur à 2 et :
$$P_n = X^n - nX + 1$$
a. Démontrer que P_n n'a que des racines simples.

b. Déterminer le nombre de ses racines réelles en fonction de n.

12 Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $1 + X + X^n$ n'a que des racines simples.

13 Déterminer tous les polynômes vérifiant :

a. $P \circ P = P$

b. $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$

c. $P(X+1) = P(X)$

d. $(X+3)P(X) = XP(X+1)$

e. $P'^2 = 4P$

f. $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$

14 Soit P un polynôme non-nul vérifiant l'égalité :
$$(E) : \quad P(X^2) = P(X+1)P(X).$$
a. Démontrer que si a est une racine de P alors a^n est racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Démontrer que toute racine non-nulle de P est de module 1.

c. Démontrer que toute racine de P différente de 1 est élément de $1 + \mathbb{U}$.

d. En déduire que seuls 0 et 1 peuvent être racines de P.

e. En déduire l'ensemble des polynômes vérifiant l'égalité (E).

15 Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$:
$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(X)}{k!}$$

16 Résoudre l'équation
$$x^3 - 8x^2 + 23x - 28 = 0$$
sachant que la somme de deux des solutions est égale à la troisième.

17 Factoriser le polynôme
$$8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$$
sachant que ses racines sont en progression arithmétique.

18 Déterminer tous les réels x, y, z tels que :
$$x + y + z = xy + xz + yz = 3$$

19 Soit a, b, c trois scalaires et α, β, γ les trois racines du polynôme $P = X^3 + aX^2 + bX + c$.

a. Exprimer $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ en fonction de a, b, c.

b. Application : résoudre le système
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 29 \\ x^3 + z^3 + z^3 = -29 \end{cases}$$

20 Soit A et B deux polynômes.

a. Démontrer que :
$$A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = (A \wedge B)\mathbb{K}[X]$$

b. Soit C un autre polynôme. A-t-on :
$$(AC) \wedge (BC) = (A \wedge B)C \quad ?$$

21 Soit m et n deux entiers naturels non-nuls, soit r le reste de la division euclidienne de n par m, et $d = n \wedge m$.

a. Soit A, B, C trois polynômes. On suppose qu'il existe un polynôme V tel que $A + BV + C = 0$. Démontrer que $A \wedge B = B \wedge C$.

b. Démontrer que $X^m - 1$ divise $X^n - X^r$.
En déduire que $X^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$.

c. Démontrer que :
$$(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = (X^m - 1) \wedge (X^r - 1)$$
puis que $(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = (X^d - 1)$.

22 Soit m et n deux entiers naturels non-nuls, et $d = m \wedge n$.

a. Soit a un diviseur de n. Justifier que $\mathbb{U}_a \subseteq \mathbb{U}_n$.

b. Démontrer que $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \mathbb{U}_d$.

c. En déduire que $(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = (X^d - 1)$.

23 Soit $A_1, \ldots, A_n$ une famille de polynômes premiers entre eux deux à deux. Pour tout $k = 1, \ldots, n$ on pose :
$$B_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} A_i$$
Démontrer que les polynômes $B_1, \ldots, B_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.

24 **Polynômes de Tchebychev**

Soit (P_n) la suite de polynômes définie par $P_0 = 1$, $P_1 = X$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

a. Calculer P_n pour n compris entre 0 et 5.

b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de P_n.

c. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(nx) = P_n(\cos x)$$

d. Quelles sont les racines du polynôme P_n ?

25 **Polynômes d'interpolation de Lagrange**

Soit α_0, α_1, α_2 trois scalaires distincts et :
$$\begin{aligned} P_0 &= (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \\ P_1 &= (X - \alpha_0)(X - \alpha_2) \\ P_2 &= (X - \alpha_0)(X - \alpha_1) \end{aligned}$$

a. Calculer $P_i(\alpha_j)$ pour tous i et j allant de 0 à 2.

Pour tout $i = 0, 1, 2$ on pose : $\quad L_i = P_i / P_i(\alpha_i)$

b. Démontrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{K}_2[X]$:
$$P = \sum_{i=0}^{2} P(\alpha_i) L_i$$

c. Soit $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ trois scalaires. Démontrer qu'il existe un et un seul polynôme de degré au plus 2 tel que pour tout $i = 0, 1, 2$: $\quad P(\alpha_i) = \beta_i$.

d. Application : déterminer l'unique parabole passant par les points de coordonnées $(-1, 1)$, $(2, 1)$, $(4, 11)$.