Corrigé du Devoir Surveillé n°5

Problème 1. Une équation fonctionnelle *(8 points)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y) = f(x) + f(y) + xy. \tag{$\star$}$$

1. *(1 point)* Pour $x = y = 0$ la relation $(\star)$ donne $f(0) = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$.
2. *(1 point)* Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y = -x$. La relation $(\star)$ donne $f(0) = f(x) + f(-x) - x^2$, donc : $f(-x) = -f(x) + x^2$.
3. *(2 points)* Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Notons $\mathcal{P}_n$: $\quad f(nx) = nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2$.

   Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation. Pour $n = 0$ la propriété est vraie, car $f(0) = 0$.

   Hérédité. Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.

   Pour $y = nx$ la relation $(\star)$ donne :

   $$f((n+1)x) = f(nx) + f(x) - nx^2.$$

   La propriété $\mathcal{P}_n$ donne alors :

   $$\begin{aligned} f((n+1)x) &= nf(x) - \tfrac{1}{2}nx^2 + \tfrac{1}{2}n^2x^2 + f(x) + nx^2 \\ &= (n+1)f(x) - \tfrac{1}{2}(n+1)x^2 + \tfrac{1}{2}(n+1)^2x^2 + \tfrac{1}{2}x^2 - nx^2 - \tfrac{1}{2}x^2 + nx^2 \\ &= (n+1)f(x) - \tfrac{1}{2}(n+1)x^2 + \tfrac{1}{2}(n+1)^2x^2 \end{aligned}$$

   Ceci montre que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

   L'hérédité est démontrée.

   Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. *(1 point)* Soit $x \in \mathbb{Q}$ et $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{p}{q}$.

   On suppose d'abord que $p \geqslant 0$.

   La relation de la question précédente, pour $n = p$ et $x = 1$ donne :

   $$f(p) = pf(1) - \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}p^2. \tag{1}$$

   Pour $n = q$ et $x = \frac{p}{q}$ elle donne :

   $$f(p) = qf(x) - \tfrac{1}{2}px + \tfrac{1}{2}p^2. \tag{2}$$

   On en déduit :

   $$qf(x) - \tfrac{1}{2}px + \tfrac{1}{2}p^2 = pf(1) - \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}p^2.$$

   Ceci donne bien :

   $$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x + f(1)x.$$

5. *(2 points)* Posons $\lambda = f(1) - \frac{1}{2}$. D'après la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{Q} \qquad f(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + \lambda x.$$

Soit x un réel. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ alors il existe une suite (x_n) de rationnels convergeant vers x. Comme les x_n sont dans $\mathbb{Q}$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(x_n) = \tfrac{1}{2}x_n^2 + \lambda x_n.$$

Comme (x_n) converge vers x alors par opérations sur les limites :

$$\tfrac{1}{2}x_n^2 + \lambda x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \tfrac{1}{2}x^2 + \lambda x.$$

Comme (x_n) converge vers x et f est continue alors :

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

Par unicité de la limite :

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + \lambda x.$$

Ce résultat est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6. *(1 point)* D'après les questions précédentes, si f est solution du problème alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + \lambda x.$$

Réciproquement, si f est une fonction de cette forme, alors f est continue, et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \begin{aligned} f(x+y) &= \tfrac{1}{2}(x+y)^2 + \lambda(x+y) \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2 + xy + \lambda x + \lambda y \\ &= f(x) + f(y) + xy. \end{aligned}$$

Ceci montre que f vérifie la relation $(\star)$.
Finalement les solutions du problème sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \lambda x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Problème 2. Une suite implicite *(15 points)*

1. (a) *(2 points)* Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x - \ln x$.
Cette fonction est dérivable, de dérivée $f' : x \longmapsto 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.
Cette dérivée est positive sur $[1, +\infty[$, négative sur $]0, 1]$.
Donc f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.
Elle admet donc un minimum en $x = 1$.
Comme $f(1) = 1$ alors f est minorée par 1, et ainsi elle est strictement positive.
Ceci montre que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x < x$.
En particulier, comme les v_n sont strictement positifs : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \ln v_n < v_n$.

(b) *(2 points)* Comme les v_n sont positifs alors : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \ln v_n < v_n^2$.
Comme $u_n \sim v_n \ln v_n$ et $u_n \longrightarrow +\infty$ alors $v_n \ln v_n \longrightarrow +\infty$.
Par théorème de comparaison : $v_n^2 \longrightarrow +\infty$.
Comme v_n est positif alors $\sqrt{v_n^2} = v_n$.
Par opérations sur les limites : $v_n \longrightarrow +\infty$.

(c) *(2 points)* Comme $u_n \sim v_n \ln v_n$ alors $\frac{u_n}{v_n \ln v_n} \longrightarrow 1$.
Par composition de limites : $\ln\left(\frac{u_n}{v_n \ln v_n}\right) \longrightarrow \ln 1 = 0$.
Par propriétés du logarithme :

$$\frac{\ln u_n}{\ln v_n} = \frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n \ln v_n} \times v_n \ln v_n\right)}{\ln v_n} = \frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n \ln v_n}\right) + \ln v_n + \ln\ln v_n}{\ln v_n}$$
$$= 1 + \frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n \ln v_n}\right)}{\ln v_n} + \frac{\ln\ln v_n}{\ln v_n}$$

Comme $\ln\left(\frac{u_n}{v_n \ln v_n}\right) \longrightarrow 0$ et $\ln v_n \longrightarrow +\infty$ alors $\frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n \ln v_n}\right)}{\ln v_n} \longrightarrow 0$.
Par croissances comparées $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et comme $v_n \longrightarrow +\infty$ alors par composition de limites : $\frac{\ln\ln v_n}{\ln v_n} \longrightarrow 0$.
Par somme de limites : $\frac{\ln u_n}{\ln v_n} \longrightarrow 1$, ce qui équivaut à : $\ln u_n \sim \ln v_n$.

(d) *(1 point)* Comme $u_n \sim v_n \ln v_n$ et $\ln u_n \sim \ln v_n$ alors :

$$\frac{u_n}{\ln u_n} \sim \frac{u_n}{\ln v_n} \sim \frac{v_n \ln v_n}{\ln v_n} = v_n.$$

Il s'agit du résultat attendu.

2. *(2 points)* Par produit la fonction $f_n : x \longmapsto x^n \ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f_n' : x \longmapsto x^{n-1}(n \ln x + 1)$.
Cette dérivée est strictement positive en x si et seulement si $\ln x > -\frac{1}{n}$, soit $x > e^{-1/n}$.
Elle ne s'annule qu'en $x = e^{-1/n}$.
La fonction f_n est donc strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0, e^{-1/n}\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[e^{-1/n}, +\infty\right[$.
Par croissances comparées, comme $n \geqslant 1$ alors $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = 0$.
Ceci montre que la fonction f_n est strictement négative sur l'intervalle $\left]0, e^{-1/n}\right]$.
Il existe donc aucun réel x dans cet intervalle tel que $f_n(x) = 1$.
On applique le théorème de la bijection sur l'intervalle $\left[e^{-1/n}, +\infty\right[$.
- La fonction f_n est strictement croissante sur cet intervalle.
- Elle est continue par produit.

Elle réalise donc une bijection de $\left[e^{-1/n}, +\infty\right[$ dans l'intervalle :

$$f\left(\left[e^{-1/n}, +\infty\right[\right) = \left[f(e^{-1/n}), \lim_{+\infty} f_n\right[= \left[-\frac{1}{en}, +\infty\right[.$$

Comme 1 appartient à ce dernier intervalle alors il admet un unique antécédent par f_n dans l'intervalle $\left[e^{-1/n}, +\infty\right[$.

Finalement il existe un et un seul réel x_n dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(x_n) = 1$.

De plus, comme $f_n(1) = 0$ et $f_n(x_n) = 1$ alors $f_n(1) < f_n(x_n)$, ce qui donne $1 < x_n$ car la fonction f_n est strictement croissante sur l'intervalle $\left[e^{-1/n}, +\infty\right[$, lequel contient 0 et 1.

3. *(1 point)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $f_n(x_n) = 1$ alors $x_n^n \ln x_n = 1$, donc $x_n^{n+1} \ln x_n = x_n$, ce qui donne $f_{n+1}(x_n) = x_n$.

   Comme $x_n > 1$ alors $f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$.

   Par stricte croissance de f_{n+1} sur $[1, +\infty[$, ceci donne $x_n > x_{n+1}$.

   Ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
4. *(1 point)* La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 1 donc par théorème de la limite monotone elle est convergente.
5. *(1 point)* Soit $\ell = \lim x_n$.

   Comme la suite (x_n) est minorée par 1 alors $\ell \geqslant 1$.

   Supposons que $\ell > 1$.

   Alors $\quad \ln x_n \longrightarrow \ln \ell \quad$ avec $\quad \ln \ell > 0$.

   Par produit $\quad n \ln x_n \longrightarrow +\infty, \quad$ par composition $\quad e^{n \ln x_n} \longrightarrow +\infty$,

   Ainsi $\quad x_n^n \longrightarrow +\infty, \quad$ et par produit $\quad x_n^n \ln x_n \longrightarrow +\infty$.

   Ceci est absurde car pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad x_n^n \ln x_n = 1$.

   Cette contradiction montre que $\ell = 1$: la suite (x_n) converge vers 1.
6. *(2 points)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\quad f_n(x_n) = 1 \quad$ alors $\quad x_n^n \ln x_n = 1$.

   En appliquant la fonction ln : $\quad n \ln x_n + \ln \ln x_n = 0$.

   Ceci donne $\quad n \ln x_n = -\ln \ln x_n = \ln \frac{1}{\ln x_n}, \quad$ puis, comme $x_n \neq 1$ alors $\ln x_n \neq 0$ et donc : $\quad n = \frac{\ln\left(\frac{1}{\ln x_n}\right)}{\ln x_n}$.

   Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad u_n = 1 \quad$ et $\quad v_n = \frac{1}{\ln x_n}$.

   Ces suites sont strictement positives car $x_n > 1$.

   De plus $\quad v_n \ln v_n = \frac{\ln\left(\frac{1}{\ln x_n}\right)}{\ln x_n} \sim n = u_n, \quad$ donc $\quad u_n \sim v_n \ln v_n$.

   On peut donc appliquer le résultat de la première question, qui donne : $\quad \frac{1}{\ln x_n} \sim \frac{n}{\ln n}$.
7. *(1 point)* Ce dernier résultat montre que : $\quad \ln x_n \sim \frac{\ln n}{n}$.

   Comme $\quad x_n \longrightarrow 1$ alors $x_n - 1 \longrightarrow 0$, et donc $\ln(1 + (x_n - 1)) \sim x_n - 1$, *i.e.*, $\ln x_n \sim x_n - 1$.

   Par transitivité de la relation d'équivalence : $\quad x_n - 1 \sim \frac{\ln n}{n}$.

Problème 3. Une équation de Pell-Fermat *(20 points)*

On souhaite résoudre l'équation :

$$a^2 = 2b^2 + 1 \tag{E}$$

d'inconnues a, $b \in \mathbb{N}$.

1. (a) *(2 points)* Soit $M \in G$. Alors il existe $(a, b) \in S$ tel que $M = aI_2 + bJ = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$.

   Le déterminant de M est $\det M = a^2 - 2b^2$.

   Comme $(a, b) \in S$ alors $a^2 - 2b^2 = 1$, donc $\det M \neq 0$ et M est inversible.

   Par propriété : $\quad M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} a & -2b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

   Ainsi $M^{-1} = aI_2 + (-b)J$, avec $a^2 - 2(-b)^2 = a^2 - 2b^2 = 1$, donc $(a, -b) \in S$ puis $M^{-1} \in G$.

   (b) *(2 points)* Soit M et M' deux éléments de G.

   Alors $M = aI_2 + bJ$ et $M' = a'I_2 + b'J$ avec $(a, b) \in S$ et $(a', b') \in S$.

   On obtient $J^2 = 2I_2$, puis :

$$MM' = (aI_2 + bJ)(a'I_2 + b'J) = (aa' + 2bb')I_2 + (ab' + ba')J.$$

   Cette matrice appartient à G si et seulement si le couple $(aa' + 2bb', ab' + ba')$ appartient à S. On calcule :

$$\begin{aligned} (aa' + 2bb')^2 - 2(ab' + ba')^2 &= a^2a'^2 + 4aa'bb' + 4b^2b'^2 - 2a^2b'^2 - 4aa'bb' - 2b^2a'^2 \\ &= a^2(a'^2 - 2b'^2) - 2b^2(a'^2 - 2b'^2) \\ &= (a^2 - 2b^2)(a'^2 - 2b'^2) = 1 \end{aligned}$$

   En effet, comme $(a, b) \in S$ et $(a', b') \in S$ alors $a^2 - 2b^2 = a'^2 - 2b'^2 = 1$.

   On en déduit $MM' \in G$, et comme ceci est valable pour tout $(M, M') \in G^2$ alors G est stable par multiplication.

   (c) *(1,5 points)* On vérifie les points de la définition d'un sous-groupe.

   - $G \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$: en effet les éléments de G sont des matrices réelles inversibles d'après la question (1a) ci-dessus.
   - G est non-vide : le couple $(a, b) = (1, 0)$ appartient à S, puisque $1^2 - 2 \times 0^2 = 1$, donc $1 \times I_2 + 0 \times J = I_2$ appartient à G.
   - G est stable par produit d'après la question (1b) ci-dessus.
   - G est stable par passage à l'opposé d'après la question (1a) ci-dessus.

   En conséquence G est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$.

2. *(1,5 points)* Soit $(a, b) = (3, 2)$. Alors $a^2 - 2b^2 = 1$, donc $(a, b) \in S$.

   Comme $A = aI_2 + bJ$ avec $(a, b) \in S$ alors $A \in G$.

   Comme G est un sous-groupe alors c'est un groupe, donc il est stable par itérations et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad A^n \in G$.

3. (a) *(1 point)* Par définition $A^n = a_n I_2 + b_n J$ et $A^{n+1} = a_{n+1} I_2 + b_{n+1} J$.
De plus $A^{n+1} = A \times A^n$, soit :
$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & 2b_{n+1} \\ b_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 2b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_n + 4b_n & 6b_n + 4a_n \\ 2a_n + 3b_n & 3a_n + 4b_n \end{pmatrix}$$
Par unicité des coefficients d'une matrice :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \end{cases} \tag{3}$$

(b) *(2 points)* Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $A^n = a_n I_2 + b_n J$ et $A^n \in G$ alors $(a_n, b_n) \in S$.
Comme $A^0 = I_2$ alors $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.
En appliquant les relations (3) on obtient $a_1 = 3$, $b_1 = 2$, puis $a_2 = 17$, $b_2 = 12$.
Les suivants sont $a_3 = 99$, $b_3 = 70$, puis $a_4 = 577$, $b_4 = 408$.
Les couples $(1, 0)$, $(3, 2)$, $(17, 12)$ sont donc solutions de l'équation (E).
On peut vérifier que $17^2 = 289 = 288 + 1 = 2 \times 144 + 1 = 2 \times (12)^2 + 1$.

4. (a) *(1 point)* Les relations (3) montrent que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 3a_{n+1} + 4b_{n+1} = 3a_{n+1} + 4(2a_n + 3b_n) = 3a_{n+1} + 8a_n + 3 \times 4b_n \\ &= 3a_{n+1} + 8a_n + 3(a_{n+1} - 3a_n) = 6a_{n+1} - a_n. \end{aligned}$$

(b) *(1 point)* La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est double récurrente linéaire car :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 0.$$
Son équation caractéristique est :
$$\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0.$$
Les racines de celle-ci sont $\lambda_1 = 3 - 2\sqrt{2}$ et $\lambda_2 = 3 + 2\sqrt{2}$.
Par théorème il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n.$$
Comme $a_0 = 1$ et $a_1 = 3$ alors on obtient $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, donc :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \frac{1}{2}(\lambda_1^n + \lambda_2^n).$$
On peut montrer que la suite (b_n) vérifie la même relation double-récurrente linéaire avec $b_0 = 0$ et $b_1 = 2$, puis calculer :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda_2^n - \lambda_1^n).$$

5. (a) *(1 point)* Soit $(a, b) \in S$. Alors $N(aI_2 + bJ) = a + b\sqrt{2}$.
Si $N(aI_2 + bJ) = 0$ alors $a + b\sqrt{2} = 0$.
Or a et b sont des entiers. Si b est non-nul alors $\sqrt{2} = -\frac{a}{b}$, ce qui est impossible car $\sqrt{2}$ est irrationnel. Donc $b = 0$, puis $a = -\sqrt{2}b = 0$.
Ceci est impossible car $(0, 0)$ n'appartient pas à S.
Cette contradiction montre que $N(aI_2 + bJ) \neq 0$.

(b) *(1 point)* Soit M et M' deux éléments de G.

Soit (a,b) et (a',b') les deux éléments de S tels que $M = aI_2+bJ$ et $M' = a'I_2+b'J$. Alors :

$$MM' = (aI_2+bJ)(a'I_2+b'J) = (aa'+2bb')I_2 + (ab'+ba')J$$
$$\text{donc} \quad N(MM') = (aa'+2bb') + (ab'+ba')\sqrt{2}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} N(M)N(M') &= (a+b\sqrt{2})(a'+b'\sqrt{2}) = (aa'+2bb') + (ab'+ba')\sqrt{2} \\ &= N(M)N(M'). \end{aligned}$$

On a vérifié que pour tout $(M,M') \in G^2$: $\quad N(MM') = N(M)N(M')$.

Ceci montre que N est un morphisme de groupes de $(G,\times)$ dans $(\mathbb{R}^*,\times)$.

6. *(1,5 points)* Soit (a,b) un élément de S avec $b \neq 0$.

si $|b| = 1$, c'est-à-dire $b = \pm 1$, alors $a^2 = 2 \times 1^2 + 1 = 3$. Ceci est impossible car 3 n'est pas un carré.

Donc $|b| \geqslant 2$, puis $b^2 \geqslant 4$, et comme $a^2 = 2b^2+1$ alors $a^2 \geqslant 9$, donc $a \geqslant 3$ car a est positif.

- Si $b > 0$, alors $b \geqslant 2$ donc $N(aI_2+bJ) = a+b\sqrt{2} \geqslant 3+2\sqrt{2}$.
- Si $b < 0$ alors $b \leqslant -2$. Alors $(aI_2+bJ)^{-1} = aI_2 - bJ$ avec $-b \geqslant 2$.

  D'après ce qui précède $N(aI_2-bJ) \geqslant 3+2\sqrt{2}$.

  Comme N est un morphisme de groupes alors $N(aI_2+bJ) = \frac{1}{N(aI_2-bJ)}$, donc :

$$N(aI_2+bJ) \leqslant \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = 3-2\sqrt{2}.$$

7. (a) *(1 point)* Comme (c,d) est solution de (E) alors $(c,d) \in S$ et donc $cI_2+dJ \in G$, soit $B \in G$.

De plus $A \in G$ et comme $(G,\times)$ est un groupe alors il est stable par passage à l'inverse et itération, donc $A^{-n}B \in G$.

(b) *(1 point)* Par définition $N(B) = c+d\sqrt{2}$.

Comme $d \geqslant 0$ alors $c > 0$ donc $N(B) > 0$, et ainsi $\ln N(B)$ est défini.

On pose $m = \left\lfloor \frac{\ln N(B)}{\ln \rho} \right\rfloor$. Alors m est un entier et :

$$m \leqslant \frac{\ln N(B)}{\ln \rho} < m+1.$$

Ceci donne :

$$m \ln \rho \leqslant \ln N(B) < (m+1)\ln \rho \qquad \text{puis} \qquad \rho^m \leqslant N(B) < \rho^{m+1}.$$

C'est le résultat attendu.

(c) *(1 point)* Comme N est un morphisme de groupes de $(G, \times)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$ alors :

$$N(A^{-m}B) = N(A)^{-m}N(B).$$

Comme $A = 3I_2 + 2J$ alors $N(A) = 3 + 2\sqrt{2} = \rho$, et donc $N(A^{-m}B) = \frac{N(B)}{\rho^m}$.

Comme $\quad \rho^m \leqslant N(B) < \rho^{m+1} \quad$ alors $\quad 1 \leqslant \frac{N(B)}{\rho^m} < \rho$.

Ceci donne bien : $\quad 1 \leqslant N(A^{-m}B) < \rho$.

(d) *(1 point)* Comme $A^{-m}B \in G$ alors il existe $(a, b) \in S$ tel que $A^{-m}B = aI_2 + bJ$.

Supposons que $b \neq 0$. D'après la question (6) ceci impose que $N(A^{-m}B) \geqslant \rho$ ou $N(A^{-m}B) \leqslant \frac{1}{\rho}$.

Ceci est faux car $1 \leqslant N(A^{-m}B) < \rho$.

Cette contradiction montre que $b = 0$. Comme $a^2 = 2b^2 + 1$ alors $a = 1$, et donc $A^{-m}B = I_2$, puis $B = A^m$.

8. *(0,5 point)* La question précédente montre que si (c, d) est une solution de l'équation (E) alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $(c, d) = (a_m, b_m)$.

Dans la question (3b) on a démontré que tous les couples (a_n, b_n) sont solutions de l'équation (E).

Par double inclusion l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des couples (a_n, b_n) où $n \in \mathbb{N}$.