Devoir à la Maison n°9

Exercice 1.

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

1. Soit f une solution du problème.
   On pose $\alpha = f(0)$ et $\beta = f(1)$.
   (a) Déterminer $f(2)$ en fonction de α et β.
   (b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ en fonction de α, β et n.
   Vérifier qu'il existe deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = an + b$.
   (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $f(n) = an + b$.
   (d) Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$: $f\left(\frac{p}{2^n}\right) = a\frac{p}{2^n} + b$.
   (e) Soit x un réel et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$.
   Étudier la suite (x_n) puis déterminer la valeur de $f(x)$.
2. Conclure : quelles sont toutes les solutions du problème ?

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, non constante et périodique.
Une période de f est un réel strictement positif T tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + T) = f(x)$.
Le but de cet exercice est de démontrer que f possède une plus petite période.
On définit : $A = \left\{\tau \in \mathbb{R}_+^* \;\middle|\; \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + \tau) = f(x)\right\}$.

1. Justifier que A admet une borne inférieure. On note t celle-ci.
2. Démontrer que f est bornée. On note a sa borne inférieure et b sa borne supérieure.
3. On suppose que $t = 0$.
   (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $x_n \in \left[0, \frac{1}{n}\right[$ tel que $f(x_n) = a$ et $y_n \in \left[0, \frac{1}{n}\right[$ tel que $f(y_n) = b$.
   (b) En déduire une contradiction.
4. Soit $H = \{\tau \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + \tau) = f(x)\}$.
   Démontrer que H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
5. On suppose que $t \notin A$.
   (a) Justifier qu'il existe $\tau_1 \in]t, 2t[\cap H$ et $\tau_2 \in]t, \tau_1[\cap H$.
   (b) En déduire une contradiction.
6. Justifier que t est la plus petite période de f.