

Chapitre A9

Dérivation

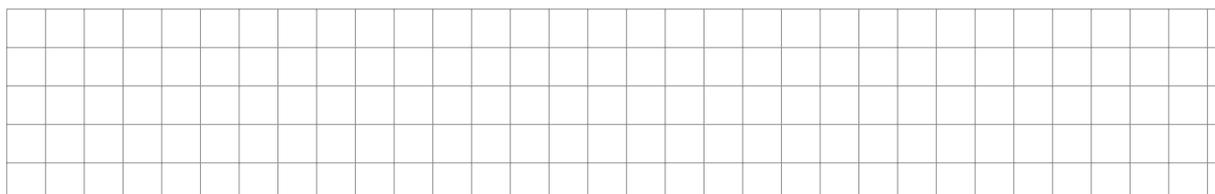
I. Fonction dérivée

A. Dérivabilité en un point

Dans toute cette partie on note D une partie de \mathbb{R} , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et x_0 un point de D . Ainsi f est définie en x_0 .

Définitions. On dit que f est dérivable en x_0 si la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0 .

Cette limite est appelée dérivée ou nombre dérivé de f en x_0 , et notée $f'(x_0)$:



Remarque. On dit que f admet un développement limité en x_0 à l'ordre 1 s'il existe deux réels a_0 et a_1 tels que :

$$f(x) \underset{(x_0)}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{ou} \quad f(x_0 + h) \underset{(0)}{=} a_0 + a_1h + o(h)$$

Proposition. La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle admet un développement limité en x_0 à l'ordre 1. Dans ce cas ce développement limité est :

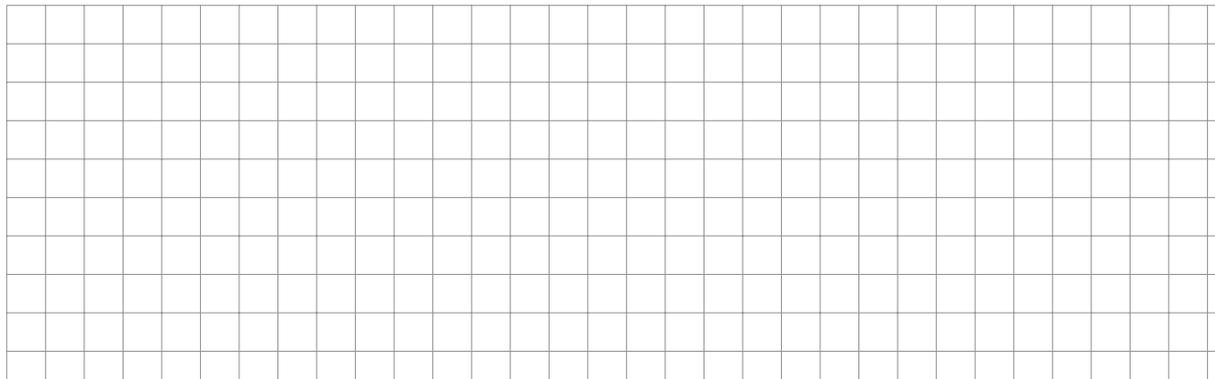
$$f(x) \underset{(x_0)}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{ou} \quad f(x_0 + h) \underset{(0)}{=} f(x_0) + hf'(x_0) + o(h)$$

B. Propriétés locales

Théorème. *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 .*

Remarque. La réciproque est fautive, comme le montre l'exemple de la fonction valeur absolue en 0.

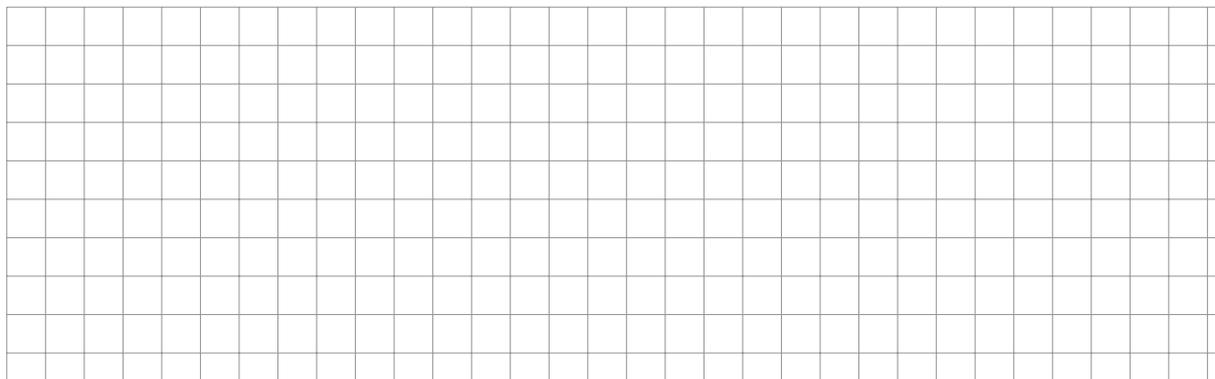
Démonstration.



Définitions. On dit que f est dérivable à gauche, respectivement dérivable à droite, en x_0 si sa restriction à $D \cap]-\infty, x_0]$, respectivement à $D \cap [x_0, +\infty[$ est dérivable en x_0 , *i.e.*, si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{resp.} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie. On note alors $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ ces limites.



Exemple 2. La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0, de dérivées -1 à gauche et 1 à droite. Elle n'est pas dérivable en 0.

Rappel. Un point x_0 est dit intérieur à D si D est un voisinage de x_0 , donc s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subseteq D$.

Proposition. *Soit x_0 un point intérieur à D .*

(i) *La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 de même dérivée des deux côtés. Dans ce cas :*

$$f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$$

(ii) *Si la fonction f est dérivable à gauche et à droite en x_0 alors elle est continue en x_0 .*

Démonstration.

(i) Si f est dérivable en x_0 alors par restriction elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 , et ses dérivées à gauche et à droite en x_0 sont égales à sa dérivée en x_0 .

Réciproquement, si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 de mêmes dérivées alors :

$$f'_g(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$$

Ceci montre que la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0 , donc f est dérivable en x_0 de dérivée $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

(ii) Si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 alors elle est continue à gauche et à droite en x_0 , donc elle est continue en x_0 . \square

C. Fonction dérivée

On note dorénavant I un intervalle de \mathbb{R} .

Définition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, A une partie de I .

On dit que f est dérivable sur A si f est dérivable en tout point de A .

On dit que f est dérivable si elle est dérivable sur I .

Si f est dérivable sur A alors la fonction

$$\begin{aligned} f' : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

est appelée fonction dérivée ou dérivée de f sur A .

Notation. La dérivée est notée f' ou $\frac{df}{dx}$.

D. Opérations sur les dérivées

Proposition. Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables.

(i) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable, de dérivée $\lambda f' + \mu g'$.

(ii) La fonction fg est dérivable, de dérivée $f'g + fg'$.

(iii) La fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur son ensemble de définition, de dérivée $-\frac{g'}{g^2}$.

(iv) La fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur son ensemble de définition, de dérivée $\frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Démonstration. Soit x_0 un point de I .

(i) Pour tout élément x de I différent de x_0 :

$$\frac{(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(x_0)}{x - x_0} = \lambda \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \mu \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Comme f et g sont dérivables en x_0 alors par somme ce taux d'accroissement admet $\lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$ pour limite lorsque x tend vers x_0 .

Donc la fonction $(\lambda f + \mu g)$ est dérivable en x_0 , de dérivée $\lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$.

II. Théorèmes

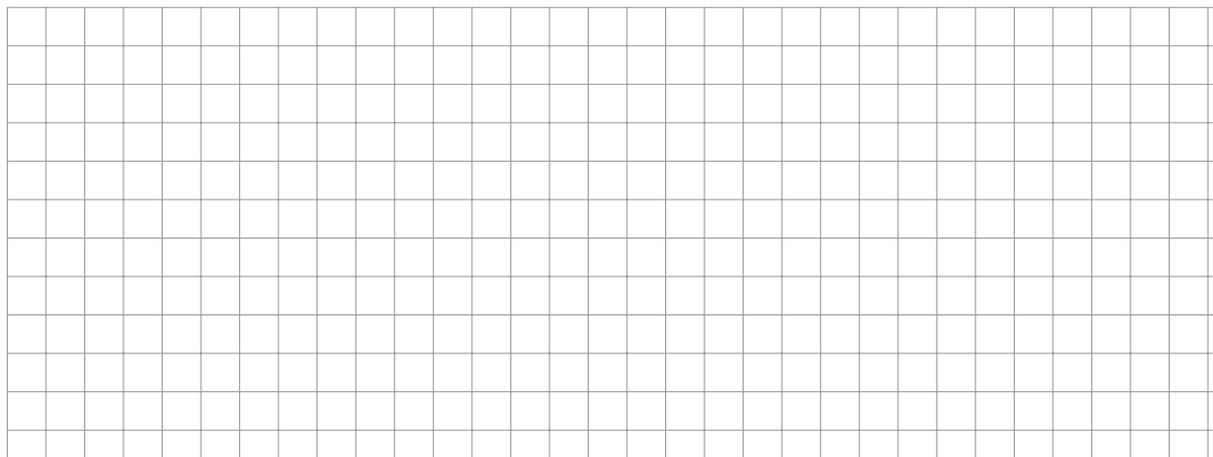
A. Extremum local

Définition. Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

La fonction f présente un maximum local en x_0 si elle présente un maximum sur un voisinage de x_0 .

La fonction f présente un minimum local en x_0 si elle présente un minimum sur un voisinage de x_0 .

La fonction f présente un extremum local en x_0 si elle présente un maximum ou un minimum local en x_0 .



Remarque. Un extremum est aussi appelé extremum global. Un extrema global peut ne pas être local, s'il est au bord de l'ensemble de définition de f .

Théorème. Soit x_0 un point intérieur à I et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x_0 . Si f présente un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Définition. Un point critique de f est un zéro de sa dérivée, c'est-à-dire un point x_0 de I tel que $f'(x_0) = 0$.

Remarques.

(i) La réciproque de ce théorème est fautive : si $f'(x_0) = 0$ alors f ne présente pas forcément d'extremum en x_0 . Par exemple $f(x) = x^3$ en $x_0 = 0$.

Le théorème dit que les extrema de f ne peuvent être qu'aux points critiques.

(ii) Le théorème est faux si x_0 n'est pas intérieur à I . Par exemple \sin sur $[0, \pi]$.

(iii) Il est également faux si f n'est pas dérivable en x_0 . Par exemple $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$.





Exemple 4. Soit f une fonction polynomiale de degré n admettant n racines réelles distinctes. Alors f' admet exactement $n - 1$ racines réelles distinctes.

Exemple 5. Si un mobile M parcourant une droite passe deux fois par le même point alors sa vitesse s'annule pendant le trajet.

C. Accroissements finis

Théorème des accroissements finis. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que :

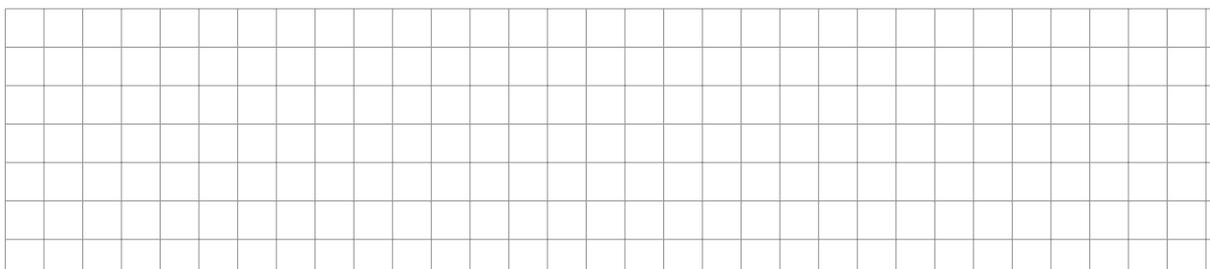
- f est continue sur $[a, b]$
- f est dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

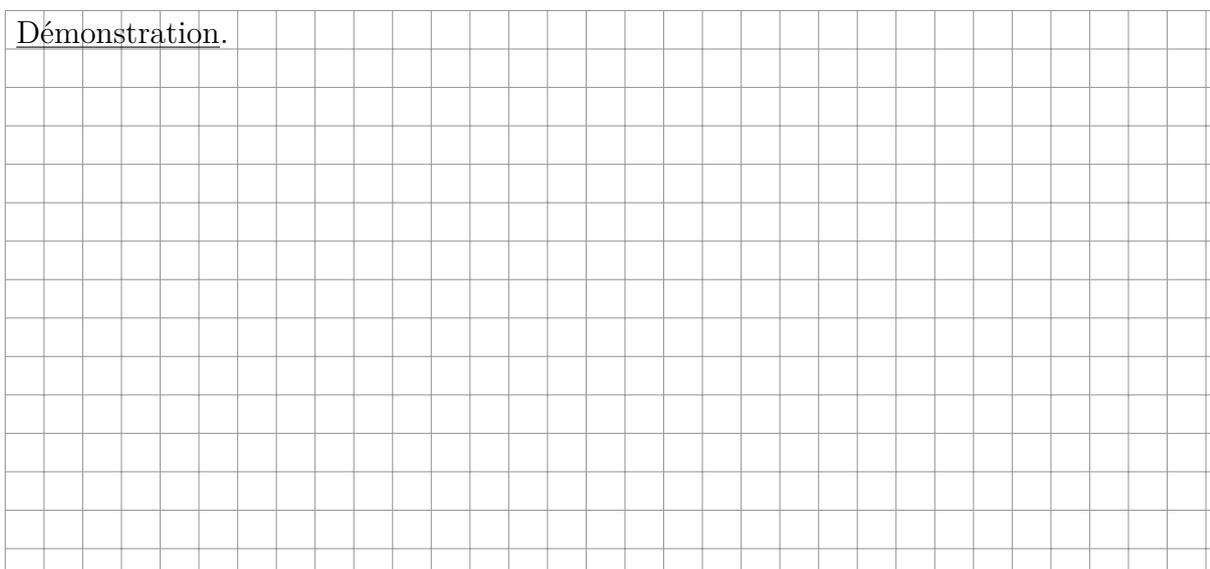
Remarques.

(i) Le théorème de Rolle est un cas particulier du théorème des accroissements finis. Il lui est en fait équivalent.

(ii) Interprétation géométrique :



Démonstration.



Corollaire : Inégalité des accroissements finis, version 1.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que :

- f est continue sur $[a, b]$
- f est dérivable sur $]a, b[$
- Il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall t \in]a, b[\quad m \leq f'(t) \leq M$

Alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

Démonstration.

Corollaire : Inégalité des accroissements finis, version 2.

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que :

- f est dérivable sur I
- $|f'|$ est bornée par un réel M , i.e., il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in I \quad |f'(t)| \leq M$

Alors f est lipschitzienne sur I :

$$\forall (x, x') \in I \quad |f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|$$

Démonstration de la version 2. Soit x et x' deux éléments de I tels que $x' \leq x$.

Si $x = x'$ alors évidemment : $|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|$

Supposons que $x' < x$. Alors $[x', x] \subseteq I$ car I est un intervalle. Par restriction f est continue sur $[x', x]$ et dérivable sur $]x', x[$.

De plus, la dérivée de f est encadrée par $-M$ et M .

En conséquence, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$-M(x - x') \leq f(x) - f(x') \leq M(x - x')$$

De façon équivalente :

$$|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|$$

Si $x \leq x'$ on démontre cette inégalité de la même manière.

Celle-ci est donc valable pour tout couple (x, x') d'éléments de I et donc la fonction f est bien M -lipschitzienne sur I . \square

Remarque. Le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis et la version 1 de l'inégalité des accroissements finis ne seront plus valables pour les fonctions complexes, alors que la version 2 le sera.

▷ Exercice 4.

Exemple 6 : suite récurrente.

- a. Démontrer que l'équation $x^3 + x = 1$ admet une unique solution α , et que celle-ci est point fixe de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
- b. Démontrer que la fonction f est k -lipschitzienne avec un certain $k \in [0, 1[$.
- Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$
- c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$
- d. En déduire que la suite (u_n) converge vers α .

D. Croissance des fonctions

Théorème. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors :

- (i) f est croissante si et seulement si f' est positive.
- (ii) f est décroissante si et seulement si f' est négative.
- (iii) f est constante si et seulement si f' est nulle.

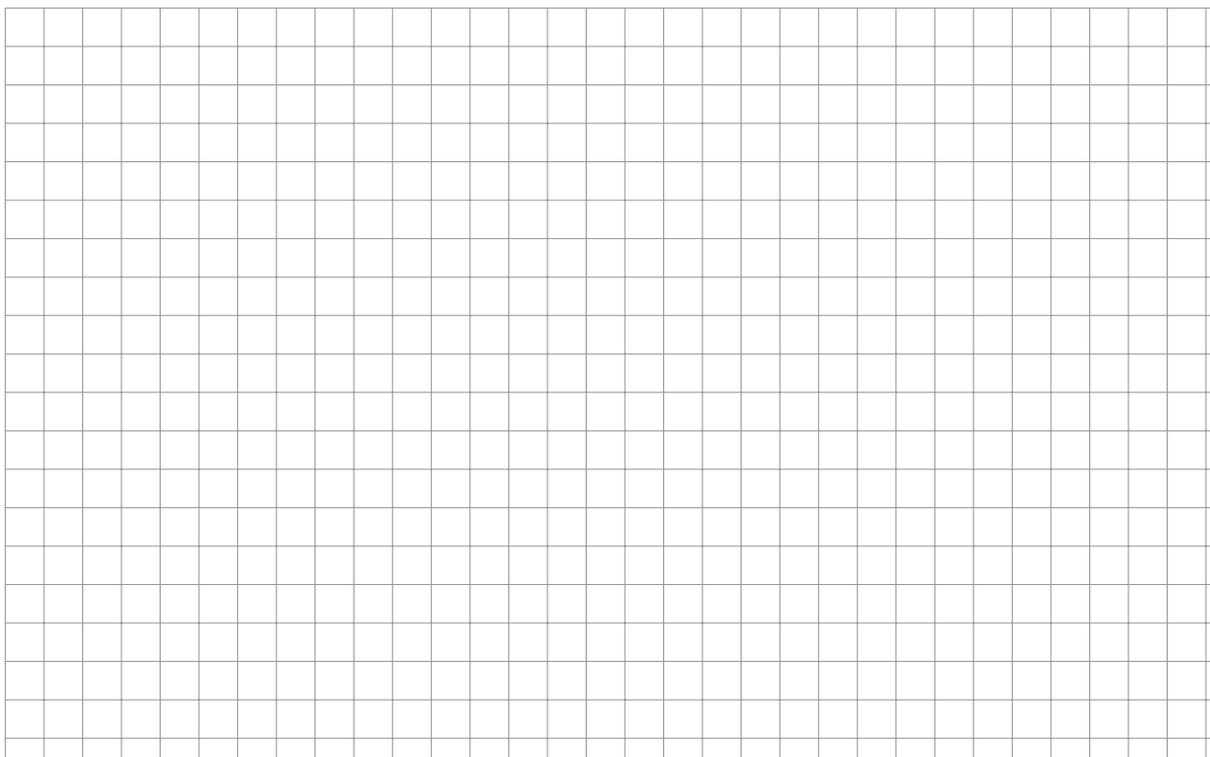
Démonstration. On démontre juste le (i). Le (ii) se démontre de la même façon, et le (iii) est conséquence de (i) et (ii).

Supposons que f est croissante. Alors, pour tout $(x, y) \in I^2$:

$$x < y \implies f(x) \leq f(y) \quad \text{et} \quad x > y \implies f(x) \geq f(y).$$

Donc $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$. Par théorème de comparaison $\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$, cette limite étant bien définie car f est dérivable, et ainsi $f'(x) \geq 0$.

La fonction f' est positive sur I .



Remarques.

(i) Ce théorème n'est valable que sur un intervalle. Exemples :

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} & x \longmapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x} \end{array}$$

(ii) On ne peut pas énoncer un tel théorème en remplaçant «croissante» par «strictement croissante» et «positive» par «strictement positive». Exemple : $x \mapsto x^3$.

Corollaire. Avec les hypothèses du théorème ci-dessus :

(i) Si f' est strictement positive sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante.

(ii) Si f' est strictement négative sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante.

Démonstration. Supposons que f' est strictement positive sauf en un nombre fini de points où elle s'annule. Alors f' est positive, donc d'après le théorème f est croissante.

Supposons que f n'est pas strictement croissante. Alors il existe deux éléments x et y de I tels que $x < y$ et $f(x) = f(y)$. Pour tout $z \in [x, y]$, comme $x \leq z \leq y$ alors $f(x) \leq f(z) \leq f(y)$ par croissance de f , et donc $f(x) = f(z) = f(y)$. Ainsi :

$$\forall z \in [x, y] \quad f(z) = f(x)$$

La fonction f est constante sur l'intervalle $[x, y]$. D'après le (iii) du théorème, ceci implique que f' est nulle sur cet intervalle. Comme $x < y$ alors l'intervalle $[x, y]$ possède une infinité de points, ce qui contredit l'hypothèse. Donc f' est strictement croissante.

On démontre le (ii) de la même façon. □

Corollaire du (iii). Soit f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I . Si $f' = g'$ alors il existe un réel K tel que $f = g + K$, i.e.,

$$\forall x \in I \quad f(x) = g(x) + K$$

Démonstration. On pose $h = f - g$. Par combinaison linéaire h est dérivable et :

$$\forall x \in I \quad h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

D'après le théorème ci-dessous, comme I est un intervalle alors h est constante, i.e., il existe un réel K tel que :

$$\forall x \in I \quad h(x) = K$$

Ceci donne $f = g + K$: $\forall x \in I \quad f(x) = g(x) + K$ □

E. Prolongement de la dérivée**Exemple 7.**

(i) Dérivabilité de $f(x) = \sqrt{x} - \arctan \sqrt{x}$.

(ii) Dérivabilité de $g(x) = \arcsin e^{-x}$.

Théorème de limite de la dérivée.

Soit I un intervalle, a un point de I , et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que :

- f est continue sur I
- f est dérivable sur $I - \{a\}$
- f' admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a .

Alors la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet également ℓ pour limite en a .

En particulier :

- (i) Si ℓ est fini alors f est dérivable en a , et $f'(a) = \ell$. De plus f' est continue en a .
- (ii) Si ℓ n'est pas fini alors f n'est pas dérivable en a .

Remarques.

- (i) Ce théorème permet d'assurer la dérivabilité de f en a . Il est souvent préférable de vérifier que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a , puis éventuellement de vérifier que la dérivée obtenue est continue en a .
- (ii) Dans le deuxième cas la courbe représentative de f admet une tangente verticale au point d'abscisse a .

Démonstration.



Toujours comme f est bijective de classe \mathcal{C}^{n+1} alors f' est de classe \mathcal{C}^n .

Par composition, d'après le (iv) ci-dessus, $f' \circ f^{-1}$ est de classe \mathcal{C}^n .

Par composition avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est de classe \mathcal{C}^∞ , la fonction $\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ est de classe \mathcal{C}^n .

Ceci montre que $(f^{-1})'$ est de classe \mathcal{C}^n , et donc f^{-1} est de classe \mathcal{C}^{n+1} .

L'hérédité est démontrée, on conclut par récurrence. \square

Théorème - Formule de Leibniz. Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables. Alors la fonction fg est n fois dérivable et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n .

Il est clair que la fonction produit fg est 0 fois dérivable. De plus :

$$(fg)^{(0)} = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)} = f^{(0)} g^{(0)} = fg$$

Le théorème est donc valide au rang 0.

Supposons qu'il est valide pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. Soit f et g deux fonctions $n+1$ fois dérivables. Comme le théorème est valide au rang n alors la fonction fg est n fois dérivable et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Comme f et g sont $n+1$ fois dérivables, alors les fonctions $f^{(k)}$ et $g^{(n-k)}$, pour $k = 0 \dots n$, sont dérivables (car $k \leq n$ et $n-k \leq n$). Par produit et somme la fonction $(fg)^{(n)}$ est dérivable et :



On a utilisé la formule de Pascal, valide si on note $\binom{n}{-1} = 0$ et $\binom{n}{n+1} = 0$.

La formule de Leibniz est démontrée au rang $(n+1)$.

Ainsi par récurrence le théorème est démontré pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. \square

Exemple 9. Calculer la dérivée 10-ème de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 \cos x$

▷ **Exercice 8.**

IV. Dérivation des fonctions complexes

A. Définition

On note toujours I un intervalle de \mathbb{R} .

Définitions. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction, et t_0 un élément de I . On dit que f est dérivable en t_0 si la fonction

$$t \mapsto \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

admet une limite finie lorsque t tend vers t_0 . On note $f'(t_0)$ cette limite, et on l'appelle dérivée de f en t_0 .

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point t_0 de I . La fonction

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto f'(t) \end{aligned}$$

est alors appelée fonction dérivée de f sur I .

Proposition. Si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable alors $\bar{f} : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable et $(\bar{f})' = \overline{f'}$.

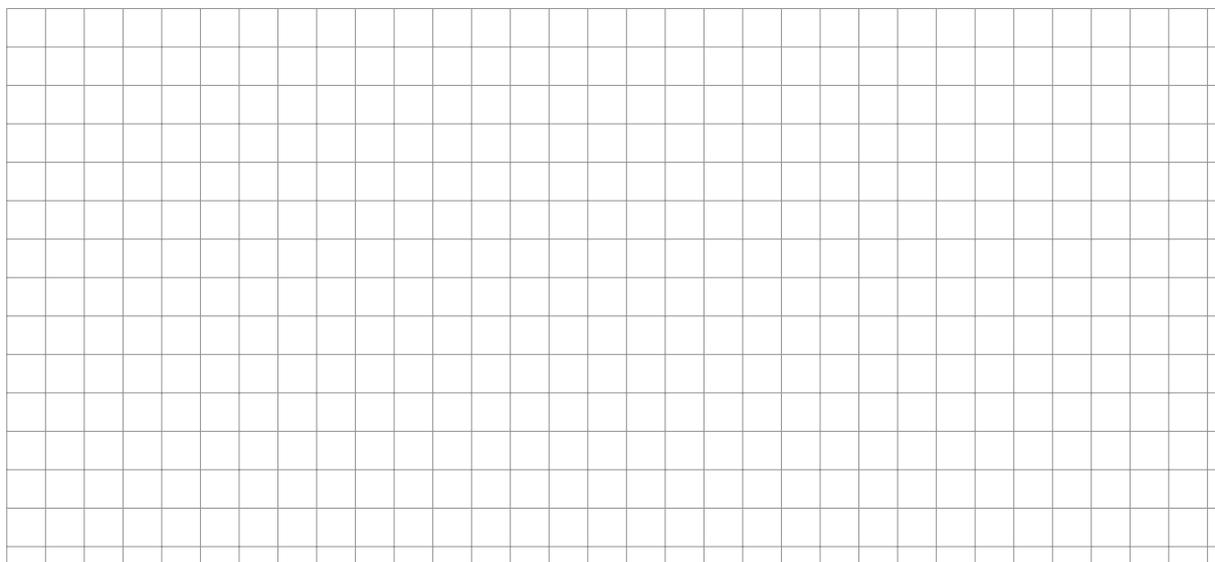
Démonstration. Il suffit de remarquer que $\frac{\bar{f}(t) - \bar{f}(t_0)}{t - t_0} = \overline{\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\right)}$. □

Théorème. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en un point t de I si et seulement si les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont dérivables en t . La dérivée de f vérifie alors :

$$\forall t \in I \quad f'(t) = (\operatorname{Re} f)'(t) + i(\operatorname{Im} f)'(t)$$

Démonstration. Ceci est conséquence des propriétés de limites des fonctions complexes : Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ admet $z = x + iy$ pour limite en a si et seulement si $\operatorname{Re} f$ admet x pour limite et $\operatorname{Im} f$ admet y pour limite en a . □

Exemple 10. Dérivabilité de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto e^{it}$



Remarque. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ peut être représentée par sa trajectoire dans le plan complexe.

Alors $f'(t)$ est l'affixe du vecteur vitesse de f au point d'affixe $f(t)$. Ce vecteur dirige la tangente à la trajectoire en ce point.

Remarque. On étend aux fonctions complexes :

- les dérivées à gauche et à droite
- les opérations de somme, produit et quotient
- la composition : Si $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : J \rightarrow \mathbb{C}$ sont deux fonctions à variable réelle, dérivables, telles que $u(I) \subseteq J$, alors $f \circ u$ est dérivable, de dérivée $(f \circ u)' = u' \cdot f' \circ u$.
- Les classes \mathcal{C}^n et \mathcal{C}^∞ .

B. Théorème

Remarque.

(i) Comme \mathbb{C} n'est pas muni de relation d'ordre, les fonctions complexes ne présentent pas d'extremum.

(ii) Le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis ne sont plus vérifiés.

Exemple 10 (suite).



Théorème : Inégalité des accroissements finis. Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On suppose que :

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- il existe un réel M tel que : $\forall t \in]a, b[\quad |f'(t)| \leq M$

Alors :

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

Remarque. Par contre, il est faux en général que si $m \leq |f'(t)|$ pour tout $t \in]a, b[$, alors $m|b - a| \leq |f(b) - f(a)|$.

Démonstration. Le nombre $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est un complexe. Soit r son module et θ un de ses arguments :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = re^{i\theta}$$

Soit g la fonction définie par :

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto f(t)e^{-i\theta} \end{aligned}$$

Comme f est dérivable sur $]a, b[$ alors par produit g est dérivable sur cet intervalle. Sa dérivée est : $\forall t \in]a, b[\quad g'(t) = f'(t)e^{-i\theta}$

Ceci montre que $|g'(t)| = |f'(t)|$ pour tout $t \in]a, b[$.

On définit les fonctions $x = \operatorname{Re} g$ et $y = \operatorname{Im} g$, si bien que $g(t) = x(t) + iy(t)$ pour tout $t \in]a, b[$. Par théorème, comme g est dérivable alors x et y sont dérivables sur $]a, b[$, et $x' = \operatorname{Re} g'$. Par propriété des complexes :

$$\forall t \in]a, b[\quad |x'(t)| \leq |g'(t)| = |f'(t)|$$

Ceci montre que x' est majorée par M sur $]a, b[$. Finalement, x est une fonction réelle, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, de valeur absolue majorée par le réel M . Par l'inégalité des accroissements finis dans le cas des fonctions réelles, on obtient :

$$|x(b) - x(a)| \leq M|b - a|$$

Or on calcule que :

$$r = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{x(b) - x(a)}{b - a} + i \frac{y(b) - y(a)}{b - a}$$

Comme r est réel alors

$$\frac{y(b) - y(a)}{b - a} = 0$$

puis

$$\left| \frac{x(b) - x(a)}{b - a} \right| = \left| \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \right| = r = \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|$$

Ceci démontre bien que :

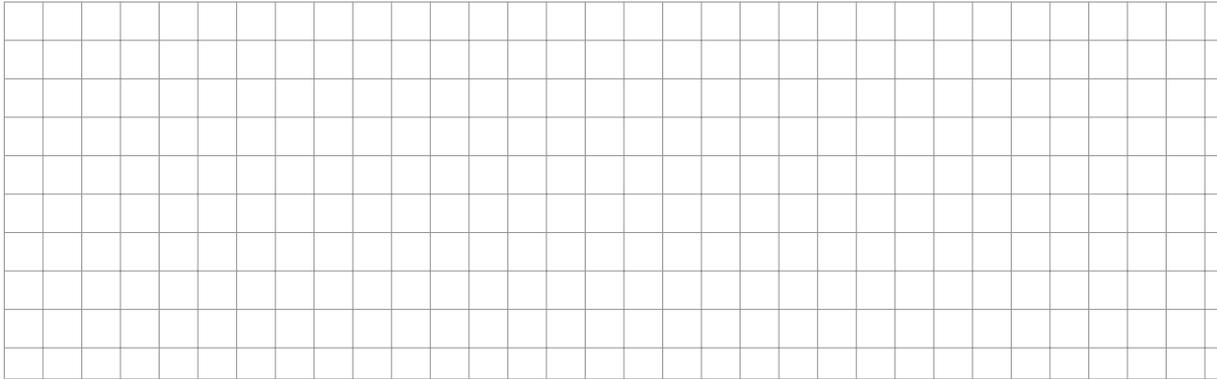
$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a| \quad \square$$

V. Convexité

Dans toute cette partie, on note I un intervalle contenant plus d'un point.

A. Définition

Graphiquement, une fonction est convexe si toute corde de sa courbe représentative est au-dessus de la courbe :



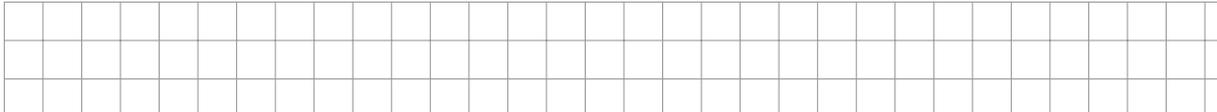
Lemme. Soit a et b deux réels avec $a \leq b$. Alors :

$$[a, b] = \{(1 - \lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1]\}$$

Démonstration. Laisée en exercice.

Intuitivement, un réel c appartient à l'intervalle $[a, b]$ si et seulement si $c - a$ est une portion de $b - a$, donc si et seulement si il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $c - a = \lambda(b - a)$. \square

Définition. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si :



Exemples. Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto e^x$, sont convexes sur \mathbb{R} .

La fonction $x \mapsto x^3$ ne l'est pas.

Exercice. Démontrer que la fonction carré est convexe.

Démontrer que la fonction inverse est convexe sur \mathbb{R}_+^* .

Définition. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est concave si la fonction $-f$ est convexe.

Ainsi une fonction concave est une fonction pour laquelle toute corde est située en-dessous de la courbe représentative.

Exemple. La fonction $x \mapsto \ln x$, définie sur \mathbb{R}_+^* , est concave.

Lemme. Soit x_1, \dots, x_n des éléments de I ($n \in \mathbb{N}^*$) et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires positifs tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ appartient à I .

Théorème. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est convexe si et seulement si pour tout $a \in I$ la fonction

$$p_a : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{est croissante.}$$

$$x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$



Démonstration. Supposons que f est convexe. Soit a un élément de I , x et y deux éléments de $I \setminus \{a\}$ tels que $x < y$. Trois cas possibles : $a < x < y$, $x < a < y$, ou $x < y < a$.

Dans le premier cas, la première inégalité du lemme donne $p_a(x) \leq p_a(y)$.

Dans le second cas les deux inégalités du lemme donnent :

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

donc par transitivité $p_a(x) \leq p_a(y)$.

Dans le troisième cas la seconde inégalité du lemme donne $p_a(x) \leq p_a(y)$.

Finalement dans tous les cas $p_a(x) \leq p_a(y)$, et donc la fonction p_a est croissante.

Supposons maintenant que pour tout $a \in I$ la fonction p_a est croissante.

Soit x et y deux éléments de I , soit λ un élément de $[0, 1]$, et soit $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$. Démontrons que :

$$f(z) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad (1)$$

Cette inégalité est évidente si $x = y$ (car alors $z = x$), si $\lambda = 0$ (car alors $z = x$) et si $\lambda = 1$ (car alors $z = y$). De plus on peut intervertir x et y quitte à remplacer λ par $1 - \lambda$, et donc supposer que $x < y$.

Si $x < y$ et $\lambda \in]0, 1[$ alors $x < z < y$. La fonction p_x est croissante donc :

$$p_x(z) \leq p_x(y) \quad \text{puis} \quad \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Comme $\lambda = \frac{z-x}{y-x}$ et $z - x > 0$ alors on en déduit exactement l'inégalité (1).

On a donc démontré que la fonction f est convexe si les fonctions pentes sont toutes croissantes.

Ainsi s'achève la démonstration du théorème. □

▷ **Exercice 10.**

C. Fonctions convexes dérivables

Théorème. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

Alors f est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante.

Démonstration. Supposons que f est convexe. Soit x et y deux éléments de I tels que $x < y$. Comme f est convexe, alors d'après le lemme de croissance des pentes :

$$\forall t \in]x, y[\quad \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(t) - f(y)}{t - y}$$

Comme f est dérivable en x alors le premier quotient ci-dessus tend vers $f'(x)$ lorsque t tend vers x . Comme f est dérivable en y alors le troisième quotient ci-dessus tend vers $f'(y)$ lorsque t tend vers y . On en déduit par théorème de comparaison :

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad \text{et} \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$$

On obtient par transitivité : $f'(x) \leq f'(y)$.

Ceci étant valable pour tout $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$, la fonction f' est croissante sur I .

Supposons maintenant que la fonction dérivée f' est croissante.

Soit x et y deux éléments de I , λ un élément de $[0, 1]$, et $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$. On souhaite démontrer que :

$$f(z) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

On peut supposer que $x < z < y$, comme on l'a justifié précédemment.

On calcule $\lambda = \frac{z-x}{y-x}$, donc $(1 - \lambda) = \frac{y-z}{y-x}$, puis $(z - x) = \lambda(y - x)$ et $(y - z) = (1 - \lambda)(y - x)$.

Comme f est dérivable sur les segments $[x, z]$ et $[z, y]$ alors d'après le théorème des accroissements finis il existe $c_1 \in]x, z[$ et $c_2 \in]z, y[$ tels que :

$$f'(c_1) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \quad \text{et} \quad f'(c_2) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Comme $c_1 \in]x, z[$ et $c_2 \in]z, y[$ alors $c_1 < c_2$. Or f' est croissante, donc $f'(c_1) \leq f'(c_2)$, ce qui donne :

$$\frac{f(z) - f(x)}{\lambda(y - x)} \leq \frac{f(y) - f(z)}{(1 - \lambda)(y - x)}$$

Comme $(y - x)$, λ et $(1 - \lambda)$ sont strictement positifs alors :

$$(1 - \lambda)f(z) - (1 - \lambda)f(x) \leq \lambda f(y) - \lambda f(z)$$

$$\text{puis} \quad f(z) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

La fonction f est donc convexe. Le théorème est démontré. □

Corollaire. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.

Alors f est convexe si et seulement si sa dérivée seconde est positive.

Démonstration. En effet la fonction f' est croissante sur l'intervalle I si et seulement si sa dérivée f'' est positive. \square

Corollaire. Une fonction dérivable sur I est concave si et seulement si sa dérivée est décroissante.

Une fonction deux fois dérivable sur I est concave si et seulement si sa dérivée seconde est négative.

Exemple 11. Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \operatorname{ch} x$ sont convexes sur \mathbb{R} .

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur \mathbb{R}_+^* et concave sur \mathbb{R}_-^* .

La fonction $x \mapsto \ln x$ est concave sur \mathbb{R}_+^* .

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur \mathbb{R}_+^* , et même sur \mathbb{R}_+ .

Théorème. La courbe représentative d'une fonction convexe dérivable est au-dessus de toutes ses tangentes.

▷ **Exercice 11.**

Remarque. De même, la courbe représentative d'une fonction concave dérivable est en-dessous de toutes ses tangentes.

Exemple. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x \geq x + 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln x \leq x - 1$.

▷ **Exercice 12.**