Feuille de T. D. A9
Dérivation

Exercices de cours

1 On admet que la fonction sinus est dérivable en 0, de dérivée 1.

a. Démontrer que la fonction cosinus est dérivable en 0, de dérivée 0.

b. Démontrer que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables en tout point de $\mathbb{R}$ et donner leurs dérivées.

2 Étudier la dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$
$$g(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$
$$h(x) = \arcsin \frac{x-1}{x+1}$$

3 **Réciproque du cosinus hyperbolique :**

a. Justifier que la fonction ch réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle à préciser.

b. On note argch la réciproque de cette bijection. Simplifier $\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x))$.

c. Sur quel ensemble la fonction argch est-elle dérivable ? Calculer sa dérivée.

4 **La série harmonique :**

a. Démontrer que pour tout entier $n > 0$:
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $\quad S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

Démontrer que : $\quad S_n \sim \ln n$

5 Soit f la fonction définie par :
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{\sin x^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

a. Démontrer que f est continue.

b. Démontrer que f est dérivable.

c. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

6 Déterminer la classe de la fonction
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^{\frac{3}{2}} \end{array}$$
C'est-à-dire le plus grand entier n tel que f est de classe $\mathcal{C}^n$.

7 Démontrer que la fonction logarithme népérien est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donner ses dérivées successives.

8 Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ème de :
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 e^x \end{array}$$

9 Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs.
Démontrer que :
$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$$

10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$, et qu'elle n'est pas constante.
Démontrer qu'elle tend vers $+\infty$ en $-\infty$.

11 Soit f une fonction dérivable et convexe sur un intervalle I.
Démontrer que la courbe représentative de f est au-dessus de toutes ses tangentes.

12 Démontrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:
$$\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$$

Travaux dirigés

1 Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$f_1 : x \mapsto x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

$f_2 : x \mapsto \arccos \sqrt{1-x^2}$

$f_3 : x \mapsto \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ $\qquad f_4 : x \mapsto \arctan \mathrm{sh}\, x$

$f_5 : x \mapsto \arccos \frac{1}{\mathrm{ch}\, x}$ $\qquad f_6 : x \mapsto \ln|\tan x|$

$f_7 : x \mapsto 2\arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \arcsin\sqrt{1-x^2}$

2 Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

$f_1 : x \mapsto \cos\sqrt{x}$ $\qquad f_2 : x \mapsto \arcsin \frac{3-x}{2}$

$f_3 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

$f_4 : x \mapsto \begin{cases} \ln(x+1) & \text{si } x \geqslant 0, \\ \frac{x}{1-x} & \text{sinon} \end{cases}$

$f_5 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ $\qquad f_6 : x \mapsto x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$f_7 : x \mapsto \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad f_8 : x \mapsto \arcsin(1-x^2)$

$f_9 : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$

3 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes. Étudier leurs prolongements par continuité et la dérivabilité de ceux-ci.

$f_1 : x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ $\qquad f_2 : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$

4 Établir les égalités suivantes.

a. $\forall x \in [-1, 1]$

$$\arcsin(2x^2 - 1) = 2 \arcsin |x| - \frac{\pi}{2}$$

b. $\forall x \in [-1, 0[\cup]0, 1]$

$$\arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \begin{cases} \arccos x & \text{si } x > 0 \\ \arccos x \ - \pi & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

5 Étudier les fonctions suivantes.

$f_1 : x \mapsto \arcsin \dfrac{x}{1+x^2}$ $\qquad f_2 : x \mapsto \arccos \dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}$

$f_3 : x \mapsto \arccos \operatorname{th} x + \arcsin \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$

6 Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Démontrer que la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{u(t)} \end{array}$$

est dérivable et donner sa dérivée.

7 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a un point intérieur à I. On définit :

$$m : h \longmapsto \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

a. Démontrer que si f est dérivable en a alors m admet une limite finie en 0.

b. La réciproque est-elle vraie ?

8 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

9 Démontrer que l'équation différentielle

$$ty' - y = 0 \qquad y(1) = 1$$

possède une unique solution dérivable sur $\mathbb{R}$.

10 Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$.

Prouver qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = g'(c)$.

11 Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

a. On suppose que f est dérivable en a et que $f'(a) > 0$.

Démontrer qu'il existe $x \in]a, b]$ tel que $f(x) > f(a)$.

b. On suppose que f est deux fois dérivable sur $[a, b]$, que $f(a) = f(b)$, et que $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$. Démontrer que f'' s'annule sur $]a, b[$.

12 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

On suppose que $f(0) = f'(0) = 0$, et qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(a) = 0$.

a. Démontrer qu'il existe un point de la courbe de f autre que l'origine tel que la tangente en ce point à la courbe passe par l'origine.

On pourra étudier la fonction $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

b. On suppose de plus que f est deux fois dérivable. Démontrer que sa dérivée seconde s'annule en un point.

13 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de classe C^1.

a. Démontrer que f' est périodique.

b. Démontrer que f' s'annule en un nombre infini de points.

c. Démontrer que f est lipschitzienne.

14 Soit P un polynôme scindé de $\mathbb{R}[X]$.

On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ses racines, rangées dans l'ordre strictement croissant.

a. Démontrer qu'il existe des racines $\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$ de P' telles que :

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \cdots < \beta_{k-1} < \alpha_k$$

b. Démontrer que P' est scindé.

15 Soient $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable.

On suppose que $f(a) \neq f(b)$.

On note A et B les points d'affixes $f(a)$ et $f(b)$, et pour tout $t \in [a, b]$, $v(t)$ le vecteur d'affixe $f'(t)$.

Soit $x = \operatorname{Re} f$ et $y = \operatorname{im} f$ la partie réelle et la partie imaginaire de f.

a. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $v(t)$ en fonction de x et y.

b. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $v(c)$ sont colinéaires.

16 Démontrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\left| e^{ib} - e^{ia} \right| \leqslant |b - a|$$

17 À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer :

$$\lim_{x \to +\infty} ((x+1) e^{\frac{1}{x+1}} - x e^{\frac{1}{x}})$$

18 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit x un point de I, et h un réel non-nul tel que $x + h$ appartient à I.

a. Démontrer qu'il existe un réel $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x + \theta h)$$

b. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, calculer un tel réel θ. Donner une interprétation géométrique de ce dernier résultat.

19 On fixe un entier m et on note :

$$I_m = \left]m\pi - \tfrac{\pi}{2}, m\pi + \tfrac{\pi}{2}\right[$$

a. Démontrer qu'il existe un unique $\alpha_m \in I_m$ tel que : $\tan\alpha_m = \alpha_m$

b. Déterminer α_0, puis α_{-m} en fonction de α_m.

On suppose dorénavant que m est strictement positif et on pose : $h_m(x) = m\pi + \arctan x$

c. Démontrer que I_m est stable par h_m, et que h_m admet α_m pour unique point fixe.

d. Démontrer que h_m est *contractante* sur I_m, *i.e.*, k-lipschitzienne avec $|k| < 1$.

e. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = m\pi$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = h_m(u_n)$

Démontrer que (u_n) converge vers α_m.

20 Soit a et b deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I et (E) l'équation différentielle :

$$y'(t) - a(t)y(t) = b(t)$$

a. Justifier que (E) possède des solutions.

b. Démontrer que ces solutions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

21 Calculer les dérivées successives des fonctions suivantes.

$f_1(x) = x^2e^{2x}$ $\quad$ $f_5(x) = \cos 2x \sin 3x$

$f_2(x) = \cos^2 x$ $\quad$ $f_6(x) = \ln(2-3x)$

$f_3(x) = \frac{1}{1-x}$ $\quad$ $f_7(x) = (x^2+4x+6)e^{-x}$

$f_4(x) = \frac{1-x}{1+x}$ $\quad$ $f_8(x) = x(x-2)^p \quad (p \in \mathbb{N})$

22 Calculer les dérivées successives de :

$$f : \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x\cos x\end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x\sin x\end{array}$$

23 Déterminer les classes des fonctions suivantes, toutes définies sur $\mathbb{R}$.

$$f_1 : x \mapsto \begin{cases} \ln(x+1) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_2 : x \mapsto |x|^3$$

$$f_3 : x \mapsto \begin{cases} x^3\ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_4 : x \mapsto \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_5 : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$

$$g_\alpha : x \mapsto \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

Pour la dernière, supposer $\alpha > 1$ et comparer la classe de g_α avec celle de $g_{\alpha-1}$.

Déterminer ensuite la classe de g_α si $\alpha \in]0,1]$.

24 Soit $f : \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xe^{x^2}\end{array}$

a. Démontrer que f est bijective.

b. Justifier que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

25 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

a. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x < 0 \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}}e^{\frac{1}{x}}$$

c. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

26 Soit I un intervalle non réduit à un point. Déterminer les fonctions convexes et concaves sur I.

27 Démontrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe majorée est constante.

28 Soit f une fonction convexe sur un intervalle I non réduit à un point.

a. Soit a et b deux points de I avec $a < b$.

Démontrer que la courbe de f est au-dessus de la corde reliant les points d'abscisses a et b sur les intervalles $I \cap]-\infty, a]$ et $I \cap [b, +\infty[$.

b. On suppose que I est borné. Démontrer que f est minorée.

29 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous réel strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$ on définit :

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad G = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \quad H = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{-1}$$

a. Démontrer que $H \leqslant G \leqslant A$.

b. Démontrer que pour tout $(x,y,z) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$:

$$\begin{array}{rcl} x^3+y^3+z^3 & \geqslant & 3xyz \\ \text{et} \quad (x+y+z)^3 & \geqslant & 27xyz \end{array}$$

c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}$$

30 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ convexe dérivable.

Démontrer que :

$$f(\tfrac{1}{2}) \leqslant \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \tfrac{f(0)+f(1)}{2}$$

31 Soit $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$.

a. Justifier que $|f''|$ admet une borne supérieure M.

b. Démontrer que :

$$\forall x \in [a,b] \qquad |f(x)| \leqslant \frac{M}{2}(x-a)(b-x)$$

On étudiera $f \pm g$ où $g(x) = \frac{M}{2}(x-a)(b-x)$.

32 Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur $]a, b[$ et continue en a.

Démontrer que f est convexe sur $[a, b[$.

33 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable. Démontrer que si

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f(b) = 0$$

alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

34 Une généralisation du théorème de Rolle
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, de limites $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

a. Démontrer qu'il existe deux réels A et B tels que $A < B$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x \notin [A, B] \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant f(0) + 1.$$

b. En déduire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

35 Soit I un intervalle non-vide, a un point de I, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

a. Démontrer que pour tout $x \in I$ il existe un réel c compris entre a et x tel que :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(c)$$

On souhaite généraliser ce résultat à l'ordre 2.

b. Démontrer que pour tout $x \in I$ il existe un réel A tel que :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2}A$$

c. En utilisant la fonction $\varphi_x : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_x(t) = f(x) - f(t) - (x - t)f'(t) - \frac{(x - t)^2}{2}A$$

démontrer qu'il existe un réel c strictement compris entre a et x tel que :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2}f''(c)$$

36 Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage I de 0 telle que :

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad \text{et} \quad f''(0) = \alpha \neq 0$$

Le but de cet exercice est de démontrer qu'alors :

$$f(x) \underset{(0)}{\sim} \alpha\frac{x^2}{2}$$

Pour tout $x \in I$ strictement positif on définit la fonction φ par :

$$\begin{aligned} \varphi : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(x)t^2 - f(t)x^2 \end{aligned}$$

a. Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^2$, puis qu'il existe $t_1 \in]0, x[$ tel que $\varphi'(t_1) = 0$.

b. Démontrer qu'il existe $t_2 \in]0, t_1[$ tel que $2f(x) = f''(t_2)x^2$.

c. On admet que de même, si $x < 0$ alors il existe $t_2 \in]x, 0[$ tel que $2f(x) = f''(t_2)x^2$.
Conclure.

37 Soit p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Démontrer que pour tout $(a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$:

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

38 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

On suppose que f s'annule en un nombre infini de points.

Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = f'(c) = 0$.