Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2024-2025**
MPSI – Mathématiques

Programme de colles
Semaine 18
du 10 au 14 février 2025

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Une fonction f dérivable sur un intervalle I est croissante si et seulement si f' est positive.
2. Théorème de limite de la dérivée.
3. Si $g : I \to J$ et $f : J \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^n$ alors $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^n$.
4. Lemme des trois pentes.
5. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors f est dérivable à droite et à gauche en tout point intérieur à I, et $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$.

Exercices

Chapitre A8. Limites et continuité

I. Limites
II. Propriétés
III. Relations de comparaison
IV. Continuité
V. Fonctions complexes

Chapitre B7. Polynômes

I. Définitions
II. Dérivation
III. Racines
IV. *Factorisation d'un polynôme* *Hors programme*
V. *Arithmétique de* $\mathbb{K}[X]$ *Hors programme*

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitres B7 (Polynômes) et début du A9 (Dérivation).

Chapitre A8. Limites, continuité

I. Limites

Limites finies et infinies d'une fonction en une borne finie ou infinie de son ensemble de définition. Unicité. Continuité en un point, prolongement par continuité. Voisinage d'un point ou d'un infini. Limites et continuité à gauche et à droite. Opérations sur les limites (somme, produit, composition).

II. Propriétés

Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a. Si f admet une limite strictement positive en a alors f est strictement positive au voisinage de a. Théorèmes de comparaison, d'encadrement. Théorème de limites des fonctions monotones. Caractérisation séquentielle de la limite, de la continuité.

III. Relations de comparaison

Négligeabilité, équivalences et domination. Toutes les propriétés pour les relations de comparaison sur les suites restent vraies. Croissances comparées, équivalences usuelles.

IV. Continuité

Continuité sur un intervalle, opérations. Théorème de valeurs intermédiaires, dichotomie, image d'un segment par une fonction continue, théorème de la bijection, toute fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone.

V. Fonctions complexes

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction, avec I intervalle de $\mathbb{R}$. Définitions : $|f|$, $\overline{f}$, $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$. Propriétés : f est bornée si et seulement si $|f|$ l'est, f tend vers a si et seulement si $\overline{f}$ tend vers $\overline{a}$, f est continue si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

Chapitre B7. Polynômes

I. Définitions

Un polynôme est une somme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où X est une indéterminée. Structure d'anneau, degré, spécialisation, divisibilité, polynômes associés. Division euclidienne.

II. Dérivation

Dérivée formelle, dérivés k-èmes, formule de Leibniz, formule de Taylor.

III. Racines

Racine d'un polynôme. Un réel α est racine de P si et seulement si $(X-\alpha)$ divise P. Un polynôme de degré n possède au plus n racines. Multiplicité (plus grand entier k tel que $(X-\alpha)^k$ divise P). Théorème : α est racine de P de multiplicité k si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Relations coefficients-racines.

IV. Factorisation d'un polynôme

Polynômes scindés. Théorème de d'Alembert-Gauss. Factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

V. Arithmétique des polynômes

PGCD, relation et théorème de Bézout, lemme de Gauss, PPCM, extension à un nombre fini de polynômes.

Polynômes irréductibles, décomposition en produit de polynômes irréductibles.