

Chapitre B8 Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On appelle scalaires ses éléments.

I. Espaces vectoriels

A. Définitions

Un espace vectoriel sur \mathbb{K} ou \mathbb{K} -espace vectoriel est un ensemble E dont les éléments sont appelés vecteurs, muni de deux opérations

$$\begin{aligned} + : E \times E &\longrightarrow E & \text{et} & & \cdot : \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (u, v) &\longmapsto u + v & & & (\lambda, u) &\longmapsto \lambda u \end{aligned}$$

appelées addition et multiplication par un scalaire, satisfaisant les propriétés suivantes :

- L'addition est commutative : $\forall (u, v) \in E^2 \quad u + v = v + u$
- L'addition est associative : $\forall (u, v, w) \in E^3 \quad (u + v) + w = u + (v + w)$
- Il existe un vecteur de E noté 0_E et appelé vecteur nul, vérifiant :

$$\forall u \in E \quad u + 0_E = 0_E + u = u$$

- Tout vecteur u de E possède un opposé noté $-u$, satisfaisant :

$$u + (-u) = (-u) + u = 0_E$$

On note $v - u$ au lieu de $v + (-u)$.

La multiplication par un scalaire vérifie :

- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall u \in E \quad (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall u \in E \quad (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall (u, v) \in E^2 \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- $\forall u \in E \quad 1_{\mathbb{K}}u = u$

Remarques.

- (i) L'addition est une loi de composition interne alors que la multiplication par un scalaire est une loi de composition externe.
- (ii) Les quatre premiers points signifient que $(E, +)$ est un groupe abélien.
Ainsi un espace vectoriel est un triplet $(E, +, \cdot)$ où $(E, +)$ est un groupe abélien et \cdot est une loi vérifiant les propriétés ci-dessus.

B. Espaces vectoriels de référence

- Espace vectoriel des n -uplets à coefficients dans \mathbb{K} :

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall i = 1, \dots, n \quad x_i \in \mathbb{K}\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ $y = (y_1, \dots, y_n)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors :

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Opposé : $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$ Vecteur nul : $0_{\mathbb{K}^n} = (0, \dots, 0)$

Exemples. \mathbb{R}^2 \mathbb{R}^3 mais aussi $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$ $\mathbb{K}^0 = \{0\}$

- Espace vectoriel des matrices de taille (n, p) à coefficients dans \mathbb{K} :

$$\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \quad (n, p \in \mathbb{N}^*)$$

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{et} \quad \lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Opposé : $-A = (-a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ Vecteur nul : $0_{\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})} = 0_{np} = (0)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

- Espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} :

$$\mathbb{K}[X]$$

Si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors :

$$P + Q = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) X^k \quad \text{et} \quad \lambda P = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda a_k X^k$$

Opposé : $-P = \sum_{k=0}^{+\infty} -a_k X^k$ Vecteur nul : $0_{\mathbb{K}[X]} = \sum_{k=0}^{+\infty} 0_{\mathbb{K}} X^k = 0_{\mathbb{K}}$

- Espace vectoriel des applications de Ω dans \mathbb{K} :

$$\mathbb{K}^\Omega \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K}) \quad (\Omega \text{ est un ensemble non-vide})$$

Si f et g sont deux applications de Ω dans \mathbb{K} et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors on définit :

$$\begin{aligned} f + g : \Omega &\longrightarrow \mathbb{K} & \text{et} & & \lambda f : \Omega &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto f(x) + g(x) & & & x &\longmapsto \lambda f(x) \end{aligned}$$

En d'autres termes :

$$\forall x \in \Omega \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$$

Opposé : $-f$ est l'application $x \mapsto -f(x)$ Vecteur nul : $0_{\mathbb{K}^\Omega}$ est l'application $x \mapsto 0_{\mathbb{K}}$

Exemples.

- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est l'espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , aussi noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
 - $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'espace vectoriel des suites indexées par \mathbb{N} à valeurs dans \mathbb{R} .
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites et λ un scalaire alors

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

- \mathbb{R}^Ω avec $\Omega = \{1, \dots, n\}$ est naturellement identifié à l'espace vectoriel \mathbb{R}^n .

- Produit cartésien de deux \mathbb{K} -espaces vectoriels :

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Le produit cartésien des ensembles E et F est :

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Il est un \mathbb{K} -espace vectoriel si on le munit des opérations suivantes :

Pour tous $(x, y), (x', y')$ éléments de $E \times F$ et λ scalaire on pose :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Opposé : $-(x, y) = (-x, -y)$ Vecteur nul : $0_{E \times F} = (0_E, 0_F)$

- Produit cartésien de n espaces vectoriels :

Plus généralement, si $(E_i)_{i=1, \dots, n}$ est une famille d'espaces vectoriels sur \mathbb{K} , alors

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \prod_{i=1}^n E_i$$

est un \mathbb{K} -espace vectoriel, muni des opérations évidentes d'addition et de multiplication par un scalaire termes à termes.

II. Sous-espaces vectoriels

A. Définition

Définition. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} . Un sous-espace vectoriel de E est une partie F de E non-vide, stable par addition et par multiplication par un scalaire, *i.e.*, telle que :

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in F^2 & & u + v \in F \\ \forall u \in F \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} & & \lambda u \in F \end{aligned}$$

Proposition (Caractérisation des sous-espaces vectoriels). *Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :*

- (i) $F \subseteq E$
- (ii) $0_E \in F$
- (iii) $\forall (u, v) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda u + v \in F$

Démonstration. Si F est une partie non-vide de E alors elle contient un vecteur u . comme $0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ alors $0_{\mathbb{K}}u \in F$, donc $0_E \in F$.

Le reste se démontre facilement. □

Remarque. Pour démontrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E on utilise la caractérisation plutôt que la définition.

Proposition. *Si F est un sous-espace vectoriel de E alors F est un espace vectoriel.*

Démonstration. L'ensemble F est stable par les lois d'addition et de multiplication par un scalaire de E , ce qui permet de définir les lois induites :

$$+ : F \times F \rightarrow F \quad \text{et} \quad \cdot : \mathbb{K} \times F \rightarrow F$$

Comme elles vérifient les axiomes de définition d'un espace vectoriel dans E alors elles vérifient aussi ces lois dans F . □

Remarque. Pour démontrer qu'un ensemble E est un espace vectoriel, il est souvent plus facile de vérifier qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence, comme \mathbb{R}^n , $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathbb{R}[X]$.

Définition. Soit u_1, u_2, \dots, u_n des éléments de E et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des scalaires. Alors le vecteur

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$$

est appelé combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2, \dots, u_n .

Remarques.

- (i) Une combinaison linéaire de plusieurs vecteurs d'un espace vectoriel est élément de cet espace vectoriel, car un sous-espace vectoriel est stable par addition et multiplication par un scalaire.
- (ii) Un sous-espace vectoriel de E est une partie non-vide de E stable par combinaisons linéaires.

B. Exemples

Remarque. Quel que soit l'espace vectoriel E , les ensembles $\{0_E\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E .

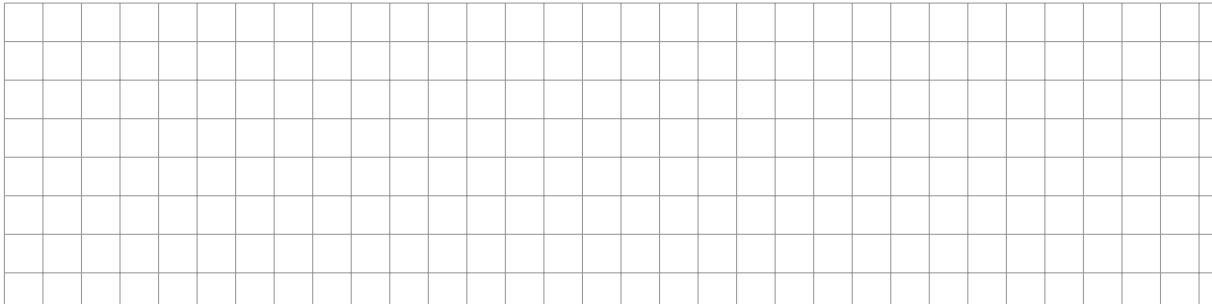
Exemples géométriques.

(i) Soit \vec{u} un vecteur non-nul de \mathbb{R}^2 . L'ensemble des combinaisons linéaires de \vec{u} est l'ensemble :

$$\{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Il s'agit de la droite passant par l'origine, de vecteur directeur \vec{u} .

C'est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .



(ii) Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . L'ensemble des combinaisons linéaires de \vec{u} et \vec{v} est l'ensemble

$$\{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires alors il s'agit du plan contenant l'origine, dirigé par les vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

**Remarques.**

(i) Les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 sont $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$, les droites passant par $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$ et \mathbb{R}^2 tout entier.

(ii) Les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 sont $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, les droites passant par $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$, les plans contenant $0_{\mathbb{R}^3}$, et \mathbb{R}^3 tout entier.

Exemple 1. $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 2. $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. De même pour \mathcal{C}^n , \mathcal{C}^∞ , etc.

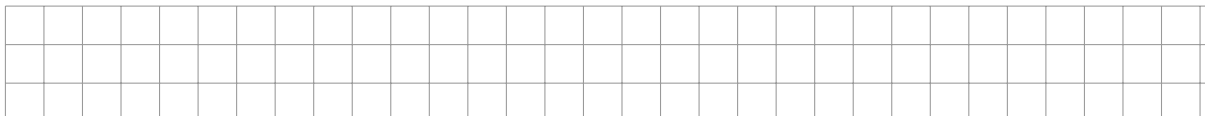
▷ **Exercices 1, 2, 3.**

III. Sommes de sous-espaces vectoriels

A. Somme

Remarque. En général $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E , comme le montre l'exemple de deux droites non confondues de \mathbb{R}^2 .

Notation. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On note $F + G$ l'ensemble des sommes d'un élément de F et d'un élément de G :



Proposition. Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Définition. Le sous-espace vectoriel $F + G$ de E est appelé somme de F et de G .



Démonstration.

- (i) Si F et G sont inclus dans E , alors tout élément u de F et tout élément v de G est élément de E . Comme celui-ci est stable par addition, car c'est un espace vectoriel, alors $u + v \in E$. Ceci montre l'inclusion $F + G \subseteq E$.
- (ii) Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors ils contiennent 0_E . Or $0_E = 0_E + 0_E$, donc $0_E \in F + G$.
- (iii) Soit w_1 et w_2 deux éléments de $F + G$ et λ un scalaire. Alors il existe $(u_1, u_2) \in F^2$ et $(v_1, v_2) \in G^2$ tels que $w_1 = u_1 + v_1$ et $w_2 = u_2 + v_2$. Par les propriétés des opérations sur les espaces vectoriels :

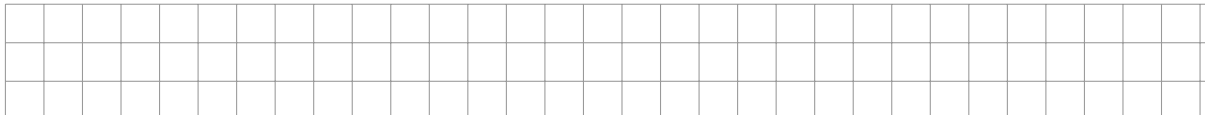
$$\lambda w_1 + w_2 = \lambda(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = (\lambda u_1 + u_2) + (\lambda v_1 + v_2)$$

Comme F est un sous-espace vectoriel alors $\lambda u_1 + u_2 \in F$, comme G est un sous-espace vectoriel alors $\lambda v_1 + v_2 \in G$, donc $\lambda w_1 + w_2 \in F + G$. Ainsi $F + G$ est stable par combinaisons linéaires.

Finalement, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E . □

Remarques.

- (i) La somme $F + G$ contient F et G :



Proposition. Soit F un sous-espace vectoriel de E , et \mathcal{F} une famille génératrice de F . Alors F est invariant par opérations élémentaires sur les vecteurs de \mathcal{F} .

Plus précisément, si $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ alors :

- Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$ avec $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + \alpha u_j, u_{i+1}, \dots, u_p)$$

- Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$:

$$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{i-1}, \lambda u_i, u_{i+1}, \dots, u_p)$$

- Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$ avec $i < j$:

$$F = \text{Vect}(u_1, \dots, \underset{(i)}{u_j}, \dots, \underset{(j)}{u_i}, \dots, u_p)$$

Démonstration. Soit \mathcal{F}' la famille obtenue par opération élémentaire sur les éléments de \mathcal{F} , et $F' = \text{Vect}(\mathcal{F}')$.

On vérifie que $\mathcal{F}' \subseteq \text{Vect}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{F} \subseteq \text{Vect}(\mathcal{F}')$.

Par propriété ceci implique $F' \subseteq F$ et $F \subseteq F'$, donc $F = F'$. \square

Proposition. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Si \mathcal{F} est une famille génératrice de F et \mathcal{G} est une famille génératrice de G , alors $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est une famille génératrice de $F + G$.

Démonstration. On note $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ et $\mathcal{G} = (v_1, \dots, v_q)$. Comme \mathcal{F} est une famille génératrice de F et \mathcal{G} est une famille génératrice de G alors

$$F = \{ \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \}$$

et $G = \{ \mu_1 v_1 + \dots + \mu_q v_q \mid (\mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^q \}$

Par définition : $F + G = \{ u + v \mid (u, v) \in F \times G \}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } F + G &= \{ \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_q v_q \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^{p+q} \} \\ &= \text{Vect}(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q) \\ &= \text{Vect}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) \end{aligned}$$

Ceci montre bien que la famille $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est génératrice de $F + G$. \square

Proposition. Soit u_1, \dots, u_{p+1} des vecteurs de E .

- (i) Si la famille (u_1, \dots, u_{p+1}) est libre alors la famille (u_1, \dots, u_p) est libre.
- (ii) Si la famille (u_1, \dots, u_p) est liée alors la famille (u_1, \dots, u_{p+1}) est liée.
- (iii) Si la famille (u_1, \dots, u_p) est libre alors la famille (u_1, \dots, u_{p+1}) est liée si et seulement si u_{p+1} est combinaison linéaire de u_1, \dots, u_p .

Démonstration. La propriété (ii) est conséquence de la propriété précédente, la propriété (i) est la contraposée de la propriété (ii).

Démontrons la propriété (iii).

Supposons que la famille (u_1, \dots, u_p) est libre et que la famille (u_1, \dots, u_{p+1}) est liée.

Alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}) \in \mathbb{K}^{p+1} \setminus \{0_{\mathbb{K}^{p+1}}\}$ tel que $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{p+1} u_{p+1} = 0_E$.

Si $\lambda_{p+1} = 0$ alors $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0_E$, ce qui implique $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ car la famille (u_1, \dots, u_p) est libre. Mais la famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1})$ est supposée non-nulle, donc on ne peut avoir $\lambda_{p+1} = 0$.

Ainsi $\lambda_{p+1} \neq 0$, donc $u_{p+1} = \sum_{i=1}^p \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_{p+1}}\right) u_i$, i.e., u_{p+1} est combinaison linéaire de u_1, \dots, u_p .

Réciproquement, si la famille (u_1, \dots, u_p) est libre et u_{p+1} est combinaison linéaire de u_1, \dots, u_p alors la famille (u_1, \dots, u_{p+1}) est liée d'après la proposition précédente. \square

Proposition.

- La famille vide est libre.
- Soit u un vecteur de E . Alors la famille (u) est libre si et seulement si u est non-nul.
- Soit u et v deux vecteurs de E . La famille (u, v) est libre si et seulement si aucun des deux vecteurs n'est colinéaire à l'autre.

En d'autres termes, la famille (u, v) est liée s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda v$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda u$.

Exemple 9. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et f_1, f_2, f_3 les trois vecteurs de E définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1(x) = \cos x \quad f_2(x) = \sin x \quad f_3(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Alors la famille (f_1, f_2) est libre.

▷ **Exercice 11.**

Proposition. Une famille de polynômes non-nuls de degrés distincts est libre.

Démonstration. Soit $(P_i)_{i=0 \dots n}$ une famille de polynômes non-nuls de degrés distincts.

Quitte à permuter les polynômes P_i on peut supposer qu'ils sont de degrés strictement croissants.

Soit $(\lambda_i)_{i=0, \dots, n}$ une famille de scalaires telle que : $\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i = 0_{\mathbb{K}[X]}$

Supposons que cette famille n'est pas la famille nulle. Il existe alors un indice m maximal tel que λ_m est non-nul, et donc :

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i P_i = 0_{\mathbb{K}[X]} \quad \text{puis} \quad P_m = -\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_m} P_i$$

Comme la famille (P_0, \dots, P_n) est de degrés strictement croissants alors les degrés de P_0, \dots, P_{m-1} sont strictement inférieurs à celui de P_m donc :

$$\deg \left(- \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_m} P_i \right) \leq \max \{ \deg P_i \mid i = 0 \dots m-1 \} < \deg P_m$$

Ceci est une contradiction, donc la famille $(\lambda_i)_{i=0 \dots n}$ est nulle, et ainsi la famille $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ est libre. \square

Définition. Une famille (P_0, \dots, P_n) de polynômes est dite de degrés échelonnés si la suite $(\deg P_i)_{i=0 \dots n}$ est strictement croissante.

Corollaire. Une famille de polynômes non-nuls de degrés échelonnés est libre.

C. Bases

Définition. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E . On dit que la famille \mathcal{F} est une base de E si elle est libre et génératrice.

Exemple 7 (suite).

Parmi les familles \mathcal{F}_1 à \mathcal{F}_5 les bases sont

Théorème. Soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E et u un vecteur de E .

Alors il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de scalaires tel que :

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

Définition. On appelle coordonnées de u dans la base \mathcal{B} ce n -uplet.

<u>Démonstration.</u>

Proposition. Pour toute partie \mathcal{E} de E l'ensemble $\text{Vect}(\mathcal{E})$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. La démonstration est identique au cas où la partie \mathcal{E} est finie. On remarque que la somme de deux combinaisons linéaires d'éléments de \mathcal{E} est une combinaison linéaire d'éléments de \mathcal{E} , car l'union de deux ensembles finis est un ensemble fini. \square

Remarques.

(i) Comme pour le cas fini, $\text{Vect}(\mathcal{E})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant \mathcal{E} , ou l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant \mathcal{E} .

(ii) Soit F un sous-espace vectoriel de E . On dit que \mathcal{E} est une partie génératrice de F si $F = \text{Vect}(\mathcal{E})$.

Notation. Soit I un ensemble infini.

(i) On note \mathbb{K}^I l'ensemble des familles de scalaires indexées par I :

$$\mathbb{K}^I = \{(\lambda_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I \quad \lambda_i \in \mathbb{K}\}$$

(ii) On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles de scalaires indexées par I , c'est-à-dire des familles dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

Remarque. Si $\lambda = (\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille de \mathbb{K}^I alors le support de λ est l'ensemble des indices i pour lesquels λ_i est non-nul. C'est une partie de I .

Ainsi les familles presque nulles sont les familles à support fini.

Exemples.

(i) Dans le cas où $I = \mathbb{N}$: une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est presque nulle si et seulement si elle est nulle à partir d'un certain rang.

(ii) On peut définir l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ par :

$$\mathbb{K}[X] = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \mid (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \right\}$$

Définition. Soit \mathcal{E} une partie de E

(i) On dit que \mathcal{E} est libre si toute famille finie d'éléments de \mathcal{E} est libre.

(ii) On dit que \mathcal{E} est liée si elle n'est pas libre, ce qui signifie qu'il existe une famille finie d'éléments de \mathcal{E} linéairement dépendants.

Exemple 12. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $f_a(x) = a^x$.

Démontrer que la famille $\mathcal{A} = \{f_a \mid a \in \mathbb{R}_+^*\}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Remarque. Comme dans le cas fini, une base de E est une famille $\mathcal{E} = (e_i)_{i \in I}$ libre et génératrice de E .

Dans le cas où I est infini, tout vecteur s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de cette famille, ce qui donne en terme de familles presque nulles :

$$\forall u \in E \quad \exists! (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \quad u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$

Les λ_i sont toujours appelés coordonnées de u dans la base \mathcal{E} .

Exemple. La famille $\{X^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée base canonique de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration. Notons F l'ensemble des solutions du système linéaire homogène S_h .

En utilisant la caractérisation on démontre que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^p .

En effet F est inclus dans \mathbb{K}^p , il contient son vecteur nul, et il est stable par addition et multiplication par un scalaire.

Supposons que \mathcal{S} est non-vide. Il admet alors au moins un élément $x = (x_1, \dots, x_p)$, qui est solution de S .

Si $y = (y_1, \dots, y_p)$ est une solution de S_h alors par addition $x + y$ est une solution de S , donc $x + F \subseteq \mathcal{S}$.

Réciproquement, soit $y = (x_1, \dots, x_p)$ une solution de S .

Par soustraction $y - x = (y_1 - x_1, \dots, y_p - x_p)$ est solution de S_h , donc appartient à F . Or $y = x + (y - x)$ donc $y \in x + F$, et on en déduit que $\mathcal{S} \subseteq x + F$.

Ainsi $\mathcal{S} = x + F$: \mathcal{S} est un sous-espace affine de \mathbb{K}^p . □

Proposition.

(i) Soit I un intervalle de \mathbb{R} , a et b deux fonctions continues définies sur I . Alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$y' - a(t)y = b(t)$$

est un sous-espace affine de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans \mathbb{R} .

Sa direction est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée.

(ii) Soit a, b, c trois réels, et $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur \mathbb{R} . Alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = d(t)$$

est un sous-espace affine de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, de direction l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée.

Remarque. Dans les deux cas ci-dessus, l'ensemble des solutions s'écrit :

$$\mathcal{S} = \{y_1 + y_0 \mid y_0 \in \mathcal{S}_h\} = y_1 + \mathcal{S}_h$$

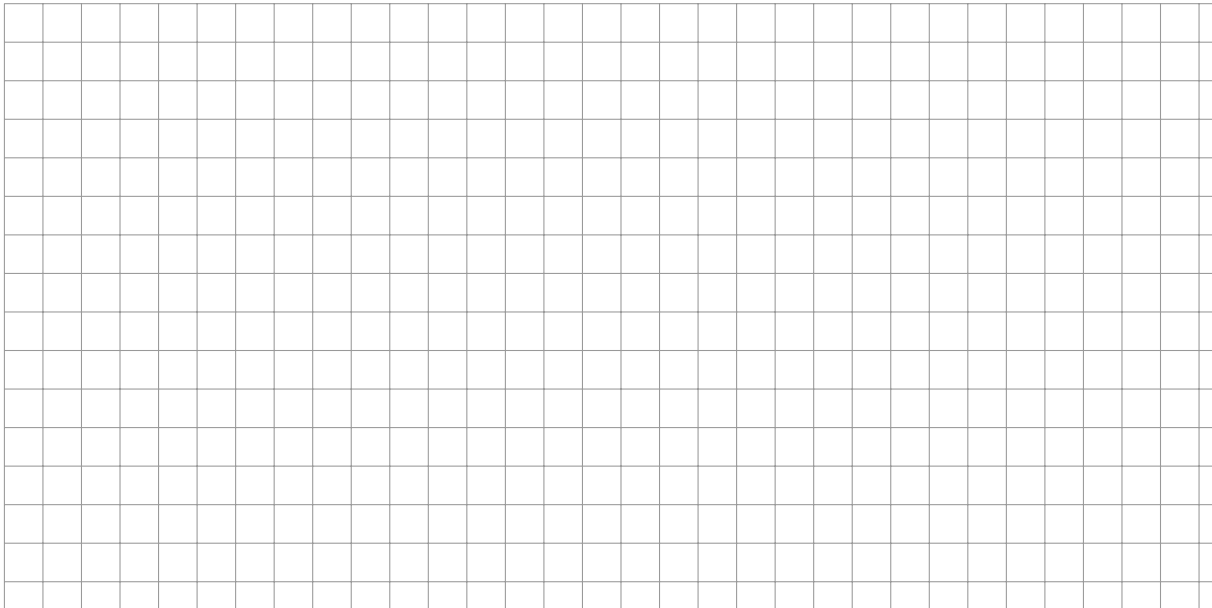
où y_1 est une solution particulière de l'équation différentielle et \mathcal{S}_h est l'ensemble des solutions de l'équation homogène, lequel est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de I ou de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

C. Intersection de sous-espaces affines

Proposition. Soit $A = a + F$ et $B = b + G$ deux sous-espaces affines de E , avec a, b points de E et F, G sous-espaces vectoriels de E .

Alors l'intersection $A \cap B$ est :

- soit vide
- soit un sous-espace affine de direction $F \cap G$.



Démonstration. Supposons que $A \cap B$ est non-vide. On note c un élément de $A \cap B$. Démontrons qu'alors $A \cap B = c + F \cap G$.

Comme $c \in A$ et $c \in B$ alors $A = c + F$ et $B = c + G$.

Soit $d \in A \cap B$. Alors $d = c + u$ avec $u \in F$ et $d = c + v$ avec $v \in G$, donc $u = v \in F \cap G$. Ainsi $d \in c + F \cap G$.

On a démontré que $A \cap B \subseteq c + F \cap G$.

Réciproquement : $F \cap G \subseteq F$ donc $c + F \cap G \subseteq c + F = A$. De même $c + F \cap G \subseteq B$, donc $c + F \cap G \subseteq A \cap B$.

Par double inclusion $A \cap B = c + F \cap G$. □

▷ **Exercice 15.**