

**Feuille de T. D. B8**  
**Espaces vectoriels**

————— Exercices de cours —————

① Les trois ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$  ?

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(x, 2) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ F_2 &= \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ F_3 &= \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

② Soit  $a$  un réel et  $C_a$  l'ensemble des suites réelles convergeant vers  $a$ . Soit :

$$C = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} C_a.$$

Les ensembles  $C_a$  et  $C$  sont-ils des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  ?

③ Démontrer que  $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  sont des espaces vectoriels.

④ Soit  $E = \mathbb{R}^5$  et  $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$  où :

$$u_1 = (0, 1, 0, 0, 0) \quad \text{et} \quad u_2 = (1, 1, 1, 1, 1).$$

Les vecteurs  $v_1 = (5, 3, 5, 5, 5)$

$$v_2 = (2, 2, 1, 1, 2)$$

$$v_3 = (-5, -5, -5, -5, -5)$$

sont-ils éléments de  $F$  ?

⑤ Donner une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'égalité  $F = F + G$ .

⑥ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer  $\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{T}'_n(\mathbb{K})$ .

Cette somme est-elle directe ?

⑦ Soit  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ . Soit  $F$  l'ensemble des fonctions paires de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $G$  l'ensemble des fonctions impaires de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

a. Démontrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

b. Démontrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires.  
(Raisoner par analyse-synthèse.)

⑧ Donner une famille génératrice de :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y + z - 5t = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y = z + 3t = 0\}$$

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5y - 4z = 0\}.$$

⑨ Les familles suivantes de  $\mathbb{R}^3$  sont-elles libres ?

$$\mathcal{F}_1 = ((3, 2, 1), (1, 1, 1), (6, 3, 1))$$

$$\mathcal{F}_2 = ((4, 3, 1), (1, 2, 4), (6, 5, 3)).$$

⑩ Les familles suivantes de  $\mathbb{K}[X]$  sont-elles libres ?

$$\mathcal{F}_1 = (2 + X^2, -2 - X + X^2, 3X)$$

$$\mathcal{F}_2 = (1 + X^2, 2 + X + X^2, 1 + X)$$

$$\mathcal{F}_3 = (1, (X - 3), (X - 4)^2)$$

$$\mathcal{F}_4 = ((X - 1)(X - 2), (X - 1)(X - 3), (X - 2)(X - 3)).$$

⑪ Soit  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , et  $f_1, f_2, f_3$  les trois éléments de  $E$  définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1(x) = \cos x$$

$$f_2(x) = \sin x$$

$$f_3(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

La famille  $(f_1, f_2, f_3)$  est-elle libre ?

⑫ Soit :  $E = \mathbb{R}^2$   $u_1 = (2, 1)$   $u_2 = (1, 2)$

a. Démontrer que  $(u_1, u_2)$  est une base de  $E$ .

b. Calculer les coordonnées dans cette base des vecteurs  $v = (13, 11)$  et  $w = (-5, 1)$ .

⑬ Soit  $E = \mathbb{R}^4$ . On note  $\mathcal{B}$  la famille des vecteurs :

$$u_1 = (2, 1, 0, 0) \quad u_2 = (0, 0, 0, 1)$$

$$u_3 = (1, 0, 1, 1) \quad u_4 = (0, 0, 1, 0).$$

a. Démontrer que la famille  $\mathcal{B}$  est libre.

b. Exprimer les quatre vecteurs de la base canonique de  $E$  en fonction des  $u_i$ .

c. En déduire que la famille  $\mathcal{B}$  est génératrice de  $E$ .

d. Déterminer les coordonnées dans cette base des vecteurs :

$$v_1 = (8, 2, 4, 4) \quad \text{et} \quad v_2 = (-1, -2, 1, 8)$$

⑭ On considère la famille :

$$\mathcal{B} = (3, 2 - X, 1 + 2X + X^2).$$

a. Démontrer que  $1, X$  et  $X^2$  sont combinaisons linéaires des éléments de  $\mathcal{B}$ .

b. En déduire que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{K}_2[X]$ .

c. Donner les coordonnées dans cette base du polynôme  $2 + 2X + 2X^2$ .

⑮ Soit  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $A$  et  $B$  les plans d'équations respectives :

$$2x + y - 5z = 3 \quad \text{et} \quad x + 2y + z = 7.$$

a. Donner un point et la direction de  $A$  et de  $B$ .

b. Décrire de même  $A \cap B$ .

Travaux dirigés

**1** Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$  ?

- $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$
- $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$
- $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 1\}$
- $F_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
- $F_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$
- $F_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$
- $F_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - \pi y = 0\}$
- $F_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \in \mathbb{Q}\}$
- $F_9 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$
- $F_{10} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ .

**2** Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  ?

- $F_1$  : ensemble des suites strictement croissantes
- $F_2$  : ensemble des suites croissantes
- $F_3$  : ensemble des suites monotones
- $F_4$  : ensemble des suites bornées
- $F_5$  : ensemble des suites périodiques
- $F_6$  : ensemble des suites convergentes
- $F_7$  : ensemble des suites divergentes ou nulles
- $F_8$  : ensemble des suites arithmétiques
- $F_9$  : ensemble des suites géométriques.

**3** Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  ?

- $F_1$  : ensemble des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$
- $F_2$  : ensemble des fonctions dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$
- $F_3 = \mathcal{C}^4([1, 8], \mathbb{R})$
- $F_4$  : ensemble des fonctions  $2\pi$ -périodiques
- $F_5$  : ensemble des fonctions périodiques.

**4** Soit  $E$  un espace vectoriel,  $F$ ,  $G$  et  $H$  trois sous-espaces vectoriels de  $E$ . Démontrer que :

- a.  $(F \cap G) + (F \cap H) \subseteq F \cap (G + H)$
- b.  $F + (G \cap H) \subseteq (F + G) \cap (F + H)$
- c. Les inclusions ci-dessus sont en général strictes.

**5** Soit  $E$  un espace vectoriel,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Démontrer que  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si  $F \subseteq G$  ou  $G \subseteq F$ .

**6** Dans l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^4$  on note  $F$  le sous-espace vectoriel engendré par :

$$u_1 = (1, -3, 5, 2) \quad \text{et} \quad u_2 = (1, -1, -4, 3).$$

- a. Le vecteur  $v = (2, -10, 26, 2)$  est-il élément de  $F$  ?
- b. Soit  $G$  l'ensemble des vecteurs  $(x, y, z, t)$  de  $F$  tels que  $y = 0$ . Démontrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**7** On définit dans  $\mathbb{R}^4$  :

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 2, 0, 0) & u_2 &= (1, 0, 2, -2) \\ v_1 &= (1, 1, 1, -1) & v_2 &= (0, 1, -1, 1). \end{aligned}$$

Démontrer que  $\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$ .

**8** Même question dans  $\mathbb{R}^3$  avec :

$$\begin{aligned} u_1 &= (2, 2, -1) & u_2 &= (5, 7, -5) \\ v_1 &= (3, 1, 1) & v_2 &= (7, 5, -1). \end{aligned}$$

**9** Soit  $E = \mathbb{R}^3$  puis :

$F$  l'ensemble des triplets  $(x, y, z)$  tels que  $x = y$ ,

$G$  l'ensemble des triplets tels que  $y = z$ .

- a. Démontrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .
- b. Démontrer que  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  sont éléments de  $F + G$ .  
En déduire que  $E = F + G$ .
- c. Cette somme est-elle directe ?

**10** On définit les vecteurs suivants de  $E = \mathbb{R}^4$  :

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 0, 0, 0) & u_2 &= (1, 1, 0, 0) \\ v_1 &= (1, 1, 1, 0) & v_2 &= (1, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

On pose ensuite :

$$F = \text{Vect}(u_1, u_2) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(v_1, v_2).$$

Démontrer que  $E = F \oplus G$ .

**11** Dans chacun des cas suivants, démontrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ .

- a.  $E = \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )  
 $F = \text{Vect}(u_0)$  où  $u_0 = (1, 1, \dots, 1)$   
 $G = \{(x_1, \dots, x_n) \in E \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$ .
- b.  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $F$  et  $G$  les ensembles des matrices respectivement symétriques et antisymétriques de  $E$ .
- c.  $E = \mathbb{R}_1[X]$   
 $F = \{P \in E \mid P(2) = 0\}$   
 $G = \{P \in E \mid P(3) = 0\}$ .
- d.  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $F$  l'ensemble des fonctions  $f$  telles que  $f(0) = 0$ ,  $G$  l'ensemble des fonctions constantes.

**12** Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$ ,  $F = \mathbb{R}_1[X]$  et :

$$G = \{P \in E \mid P(1) = P'(1) = 0\}.$$

- a. Démontrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .
- b. Démontrer que  $F$  et  $G$  sont en somme directe.
- c. En utilisant la formule de Taylor ou la division euclidienne, démontrer que  $E = F + G$ .
- d. Donner la décomposition de  $X^3$ ,  $X^2$ ,  $X$  et 1 dans cette somme directe.

**13** Soit  $E = \mathbb{K}[X]$ . Pour tout  $a \in \mathbb{K}$  on pose :

$$E_a = \{P \in E \mid P(a) = 0\}.$$

- Justifier que pour tout  $a \in \mathbb{K}$ ,  $E_a$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- Démontrer que si  $a \neq b$  alors  $E = E_a + E_b$ .
- Cette somme est-elle directe ?

**14** Soit  $E$  l'ensemble des fonctions continues de  $[0, \pi]$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $F$  l'ensemble des fonctions  $f$  de  $E$  vérifiant  $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi)$  et  $G = \text{Vect}_E(\cos, \sin)$ .

- Démontrer que  $E$  est un espace vectoriel et que  $F$  et  $G$  en sont deux sous-espaces vectoriels.
- Démontrer que pour tout  $f \in E$  il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $f - \alpha \cos - \beta \sin \in F$ .
- Démontrer que  $E = F \oplus G$ .

**15** Les familles suivantes sont-elles libres ?

$$\mathcal{F}_1 = ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)) \text{ dans } \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{F}_2 = ((1, 1, a), (1, a, 1), (a, 1, 1)) \text{ dans } \mathbb{R}^3 \ (a \in \mathbb{R})$$

$$\mathcal{F}_3 = ((1, 6, 5), (7, 2, 5), (9, 2, 6)) \text{ dans } \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{F}_4 = ((1, 3, 4), (4, 9, 8), (16, 27, 16)) \text{ dans } \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{F}_5 = ((2, 1, -1, -2), (6, 4, 4, 6), (0, 1, 7, 12)) \text{ dans } \mathbb{R}^4$$

$$\mathcal{F}_6 = (u_i = (3, \dots, 3, \underset{(i)}{1}, 3, \dots, 3) \mid i = 1 \dots n) \text{ dans } \mathbb{R}^n.$$

Démontrer que les familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_6$  sont génératrices.

**16** Soit  $E = \mathbb{R}^4$  et :

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid 2x + y + t = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in E \mid x - z - 3t = 0\}.$$

- Donner la dimension de  $F$ ,  $G$ , puis  $F \cap G$ .
- Déterminer  $F + G$ .

**17** Soit  $E = \mathbb{R}^4$  et :

$$F = \text{Vect}((1, 3, 1, 2), (2, 4, 2, 3))$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + t = y + z\}.$$

Donner la dimension de  $F$ ,  $G$ ,  $F \cap G$ , puis  $F + G$ .

**18** Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$  et :

$$F = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = 0\}$$

$$G = \{P \in E \mid P(3) = P(4) = 0\}.$$

- Démontrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$  et donner une base de chacun d'entre eux.
- Démontrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires.

**19** Soit  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

- Soit  $F$  l'ensemble des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 15u_n.$$

Démontrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et en donner une base.

- Même question avec les suites telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 8u_{n+1} - 16u_n.$$

**20** Soit  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , et  $F$  le sous-ensemble de  $E$  contenant les suites arithmétiques.

Démontrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie et donner sa dimension.

**21** Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  deux fois dérivables.

- Démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $y'' + 2y' + y = 0$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie et donner sa dimension.

- Même question avec l'équation  $y'' + \omega^2 y = 0$  où  $\omega$  est un réel non-nul fixé.

**22** Démontrer que l'ensemble des fonctions sinusoïdales de période  $2\pi$  :

$f : x \mapsto A \sin(x + \varphi) + K$  avec  $(A, \varphi, K) \in \mathbb{R}^3$  est un espace vectoriel de dimension finie et donner sa dimension.

**23** Soit  $\alpha$  un scalaire.

- Démontrer que la famille  $((X - \alpha)^k)_{k \in \mathbb{N}}$  est libre.
- Démontrer que cette famille est une base de  $\mathbb{K}[X]$ , et donner les coordonnées d'un polynôme quelconque  $P$  dans cette base.

**24** Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  on définit la fonction :

$$f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{1+x^\alpha}$$

- Démontrer que la partie  $\mathcal{E} = \{f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$  est liée.
- Démontrer que la partie  $\mathcal{F} = \{f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}_+\}$  est libre.
- La partie  $\mathcal{F}$  est-elle génératrice ?

**25** Soit  $E = \mathbb{R}^4$ , et :

$$A = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + y - 2t = 2\}$$

$$B = \{(x, y, z, t) \in E \mid 2x - 2z + 3t = 3\}$$

$$C = A \cap B.$$

Justifier que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sont des sous-espaces affines de  $E$ . Donner un point et la direction de chacun d'entre eux.

**26** Soit  $E = \mathbb{K}[X]$  et :

$$A = \left\{ P \in E \mid \begin{array}{l} P(1) = P'(0) = 0 \\ P(0) = P'(1) = 1 \end{array} \right\}.$$

- Déterminer un polynôme  $P_0$  de degré minimal appartenant à  $A$ .
- Décrire l'ensemble  $\{P - P_0 \mid P \in A\}$ .
- En déduire que  $A$  est un sous-espace affine de  $E$  et décrire ses éléments.