Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2024-2025**
MPSI – Mathématiques

Programme de colles
Semaine 19
du 3 au 7 mars 2025

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. L'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
2. Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E. Alors $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E
3. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.
4. Une famille est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Exercices

Chapitre B7. Polynômes

I. Définitions
II. Dérivation
III. Racines
IV. Factorisation d'un polynôme
V. Arithmétique de $\mathbb{K}[X]$

Chapitre A9. Dérivation

I. Fonction dérivée	
II. Théorèmes	Juste le théorème de limite de la dérivée
III. *Dérivées successives*	*Hors programme*
IV. *Dérivation des fonctions complexes*	*Hors programme*
V. *Convexité*	*Hors programme*

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitre A9 (Dérivation).

Chapitre B7. Polynômes

I. Définitions

Un polynôme est une somme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où X est une indéterminée. Structure d'anneau, degré, spécialisation, divisibilité, polynômes associés. Division euclidienne.

II. Dérivation

Dérivée formelle, dérivés k-èmes, formule de Leibniz, formule de Taylor.

III. Racines

Racine d'un polynôme. Un réel α est racine de P si et seulement si $(X-\alpha)$ divise P. Un polynôme de degré n possède au plus n racines. Multiplicité (plus grand entier k tel que $(X-\alpha)^k$ divise P). Théorème : α est racine de P de multiplicité k si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Relations coefficients-racines.

IV. Factorisation d'un polynôme

Polynômes scindés. Théorème de d'Alembert-Gauss. Factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

V. Arithmétique des polynômes

PGCD, relation et théorème de Bézout, lemme de Gauss, PPCM, extension à un nombre fini de polynômes.

Polynômes irréductibles, décomposition en produit de polynômes irréductibles.

Chapitre A9. Dérivation

I. Fonction dérivée

Dérivabilité en un point. Dérivabilité à gauche, à droite. La dérivabilité implique la continuité. Fonction dérivée, opérations : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, dérivée de la réciproque.

II. Théorèmes

Si f dérivable présente un extremum local alors sa dérivée s'y annule. Point critique. Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis, inégalité des accroissements finis. Application aux suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors f est croissante (resp. décroissante, constante) si et seulement si f' est positive (resp. négative, nulle). Théorème de limite de la dérivée.

III. Dérivées successives

Définition. Classes $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$. Exemples : x^n, e^x, $\ln x$, $\cos x$, $\sin x$. Formule de Leibniz.

IV. Dérivation des fonctions complexes

Définition. Propriété : $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont, et alors $f' = (\operatorname{Re} f)' + (\operatorname{Im} f)'$. Les théorèmes sur les extrema, le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis ne sont plus valables, mais l'inégalité des accroissements finis l'est encore, du moins pour la majoration.

V. Convexité

Définition, inégalité de Jensen. Lemme des trois pentes, théorème de croissance des pentes. Régularité : si f est convexe alors f est dérivable à gauche et à droite en tout point a et $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$. Si f est convexe sur un intervalle ouvert alors f est continue.

Cas des fonctions dérivables, deux fois dérivables. Position par rapport aux tangentes.

Fonction concaves, résultats similaires.