Devoir à la Maison n°10

Calcul de $\zeta(2)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Le but de ce devoir est de démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et de calculer sa limite, que l'on note $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ et qui est la valeur en 2 de la fonction zêta de Riemann.

On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$P_0 = X \qquad P_1 = 3X - 4X^3 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+2} = 2(1-2X^2)P_{n+1} - P_n$$

Partie A.

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de P_n et son coefficient dominant.
2. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$P_n(\sin t) = \sin\left((2n+1)t\right) \tag{1}$$

   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le polynôme P_n est multiple de X.

On note Q_n le quotient de P_n par X, si bien que $P_n = XQ_n$.

3. (a) En dérivant la relation (1), déterminer $P_n'(0)$.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(1-X^2)P_n'' - XP_n' + (2n+1)^2 P_n = 0.$$

   (c) Déterminer successivement les valeurs de $P_n''(0)$, $P_n^{(3)}(0)$, $Q_n(0)$, $Q_n'(0)$ et $Q_n''(0)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
   (a) Résoudre l'équation $P_n(\sin t) = 0$.
   (b) Déterminer les racines de P_n appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$.
   (c) Déterminer toutes les racines de P_n.
   (d) Donner la décomposition en facteurs irréductibles de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

Partie B.

1. Soit n un entier naturel non-nul.
   (a) Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels distincts et λ un réel quelconque non-nul.
   On pose $f(x) = \lambda(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$ et $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.
   En dérivant la fonction $g = \ln|f|$ démontrer que :
   $$\forall x \in \mathcal{D} \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-\alpha_i}.$$
   (b) En déduire que pour tout réel x dans un ensemble $\mathcal{D}$ à préciser :
   $$\frac{Q_n'(x)}{Q_n(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2x}{x^2 - \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$
   (c) En dérivant cette relation démontrer que :
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = -\frac{Q_n''(0)}{2Q_n(0)}$$
2. (a) Soit x un réel strictement positif, f une fonction dérivable sur l'intervalle $[0,x]$, et k un entier naturel.
   Démontrer que :
   $$\text{Si} \qquad \forall t \in \,]0,x[\quad 0 \leqslant f'(t) \leqslant x^k \qquad \text{alors} \qquad 0 \leqslant f(x) - f(0) \leqslant x^{k+1}.$$
   (b) Soit h la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :
   $$h(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}.$$
   Calculer les quatre premières dérivées de h puis appliquer plusieurs fois le résultat de la question précédente pour démontrer que : $h(x) \underset{(0)}{=} o(x^3)$.
3. On définit la fonction φ par :
   $$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}.$$
   Démontrer que cette fonction admet une limite finie en 0 et en déduire qu'elle est bornée sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Utiliser tout ce qui précède pour démontrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et obtenir sa limite.

Indications.

Partie B.

1. (a) La dérivée de $\ln|u|$ est $\frac{u'}{u}$.
   (b) Les racines de P_n sont les $\sin\frac{k\pi}{2n+1}$ pour $k=-n,\dots,n$.
2. (a) Appliquer un certain théorème de dérivation.
   (b) Appliquer le résultat de la question précédente quatre fois.
3. Écrire $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + h(x)$, et faire apparaître des $\frac{h(x)}{x^3}$.
4. Se donner un majorant M de $|\varphi|$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   Encadrer $\left|\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right|$ à l'aide de ce majorant.

   Faire apparaître S_n.