

Exemples et définitions.

Les applications suivantes sont linéaires.

- (i) Identité de E $\text{Id}_E : E \longrightarrow E$
 $u \longmapsto u$
- (ii) Application nulle de E dans F $E \longrightarrow F$
 $u \longmapsto 0_F$
- (iii) Homothétie de E de rapport α $h_\alpha : E \longrightarrow E$ où $\alpha \in \mathbb{K}$
 $u \longmapsto \alpha u$
- (iv) Dérivation $D : \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$
 $f \longmapsto f'$
- (v) Spécialisation en α $f_\alpha : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}$ où $\alpha \in \mathbb{K}$
 $P \longmapsto P(\alpha)$



B. Opérations sur les applications linéaires

Notations. Pour tous espaces vectoriels E et F on note :

L'ensemble des applications linéaires de E dans F :
L'ensemble des endomorphismes de E :

Rappel. Soit f et g deux éléments de $\mathcal{L}(E, F)$ et λ un scalaire. Alors les applications de E dans F notées $(f + g)$ et λf sont définies par :

$$\forall u \in E \quad (f + g)(u) = f(u) + g(u)$$

$$(\lambda f)(u) = \lambda f(u)$$

Proposition. Les applications $(f + g)$ et λf sont linéaires.

Proposition. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ muni des opérations rappelées ci-dessus est un espace vectoriel sur \mathbb{K} . Son élément nul $0_{\mathcal{L}(E, F)}$ est l'application nulle de E dans F .

Proposition. Soit E , F et G trois espaces vectoriels, $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications linéaires. Alors $g \circ f$ est linéaire.

Démonstration.



Proposition. Soit E , F et G trois espaces vectoriels. L'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(F, G) \times \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow \mathcal{L}(E, G) \\ (g, f) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

est bilinéaire.

Ceci signifie qu'elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F) \quad \text{l'application } \mathcal{L}(F, G) \longrightarrow \mathcal{L}(E, G) \quad \text{est linéaire} \\ g \longmapsto g \circ f$$

$$\forall g \in \mathcal{L}(F, G) \quad \text{l'application } \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathcal{L}(E, G) \quad \text{est linéaire} \\ f \longmapsto g \circ f$$

On peut écrire ceci :

$$\begin{aligned} \forall (f, f_1, f_2) \in \mathcal{L}(E, F)^3 \\ \forall (g, g_1, g_2) \in \mathcal{L}(F, G)^3 \end{aligned} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \begin{cases} g \circ (\lambda f_1 + f_2) = \lambda(g \circ f_1) + g \circ f_2 \\ (\lambda g_1 + g_2) \circ f = \lambda(g_1 \circ f) + g_2 \circ f \end{cases}$$

Démonstration. La première linéarité est conséquence de la linéarité de g . La seconde est conséquence de la définition de l'application $\lambda g_1 + g_2$. \square

Remarque. Le triplet $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est donc un anneau. Il n'est pas commutatif en général. L'élément neutre pour la loi \circ est Id_E , noté aussi id_E ou id .

On note couramment gf , f^2 , f^k au lieu de $g \circ f$, $f \circ f$, $f \circ \dots \circ f$.

C. Isomorphismes

Définition. Un isomorphisme est une application linéaire bijective.

Proposition. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Si f est un isomorphisme, alors sa réciproque $f^{-1} : F \rightarrow E$ est linéaire (c'est donc également un isomorphisme).

Démonstration.

Proposition. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ sont deux isomorphismes alors $g \circ f$ est un isomorphisme, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Définition. Un automorphisme est un endomorphisme bijectif, ou de façon équivalente un isomorphisme d'un espace vectoriel dans lui-même.

L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$ et appelé groupe linéaire de E .

Alors $(GL(E), \circ)$ est un groupe. C'est le groupe des inversibles de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.

D. Applications linéaires et somme directe

Proposition. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire et E_1 un sous-espace vectoriel de E . Alors la restriction de f à E_1 , notée $f|_{E_1}$, est une application linéaire de E_1 dans F .

De plus l'application de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(E_1, F)$ qui à f associe sa restriction à E_1 est linéaire.

Démonstration. Soit $(u, v) \in E_1^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors $\lambda u + v \in E_1$ car E_1 est un sous-espace vectoriel de E , et :

$$\begin{aligned} f|_{E_1}(\lambda u + v) &= f(\lambda u + v) && \text{par définition de la restriction} \\ &= \lambda f(u) + f(v) && \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= \lambda f|_{E_1}(u) + f|_{E_1}(v) && \text{car } u \text{ et } v \text{ appartiennent à } E_1. \end{aligned}$$

Ceci montre que $f|_{E_1}$ est linéaire.

De plus si f et g sont deux applications linéaires de E dans F et λ est un scalaire alors :

$$\forall u \in E_1 \quad (\lambda f + g)|_{E_1}(u) = (\lambda f + g)(u) = \lambda f(u) + g(u) = \lambda f|_{E_1}(u) + g|_{E_1}(u)$$

Ceci montre que $(\lambda f + g)|_{E_1} = \lambda f|_{E_1} + g|_{E_1}$, donc l'application de restriction $f \mapsto f|_{E_1}$ est bien linéaire. \square

Théorème. Soit E et F deux espace vectoriels. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . Soit $f_1 : E_1 \rightarrow F$ et $f_2 : E_2 \rightarrow F$ deux applications linéaires.

Alors il existe une unique application linéaire $f : E \rightarrow F$ telle que $f|_{E_1} = f_1$ et $f|_{E_2} = f_2$.

Remarque. On retient que si E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E alors une application linéaire de E est uniquement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2 .

Démonstration. Si une telle application existe, alors :

$$\forall u_1 \in E_1 \quad f(u_1) = f_1(u_1) \quad \text{et} \quad \forall u_2 \in E_2 \quad f(u_2) = f_2(u_2)$$

Comme f est linéaire alors :

$$\forall (u_1, u_2) \in E_1 \times E_2 \quad f(u_1 + u_2) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$$

Ceci définit une application de E dans F car tout élément u de E s'écrit de façon unique comme somme $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_2$, puisque $E_1 \oplus E_2 = E$.

Démontrons qu'elle est linéaire.

Soit $(u, v) \in E$. On note $u = u_1 + u_2$ et $v = v_1 + v_2$ avec u_1 et u_2 éléments de E_1 , et v_1 , v_2 éléments de E_2 . Soit également λ un scalaire.

Comme E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels alors $\lambda u_1 + u_2$ est élément de E_1 et $\lambda v_1 + v_2$ est élément de E_2 . De plus :

$$f(\lambda u + v) = f((\lambda u_1 + v_1) + (\lambda u_2 + v_2)) = f_1(\lambda u_1 + v_1) + f_2(\lambda u_2 + v_2)$$

Comme f_1 et f_2 sont linéaires alors :

$$f(\lambda u + v) = \lambda f_1(u_1) + f_1(v_1) + \lambda f_2(u_2) + f_2(v_2) = \lambda f(u) + f(v)$$

La fonction f est donc bien linéaire. Elle est uniquement déterminée par la formule $f(u_1 + u_2) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$ d'après le début de cette démonstration, donc la propriété est démontrée. \square

Théorème. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors :

- (i) f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$.
- (ii) f est surjective si et seulement si $\text{im } f = F$.

▷ **Exercice 3.**

Démonstration.



C. Application : systèmes et équations différentielles linéaires

Propositions.

- (i) L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^p .
- (ii) Soit I un intervalle, et $a : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène

$$y' - a(t)y = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.

- (iii) Soit a, b, c trois scalaires.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène

$$ay'' + by' + cy = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

Démonstration.

(i) Soit S un système linéaire homogène de n lignes à p colonnes. Soit A la matrice qui lui est associée. Alors la représentation matricielle de ce système est $AX = 0$, où 0 est la matrice colonne nulle à n lignes.

L'application $f : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est linéaire. En effet :

$$X \longmapsto AX$$

$$\forall (X_1, X_2) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

$$f(\lambda X_1 + X_2) = A(\lambda X_1 + X_2) = \lambda AX_1 + AX_2 = \lambda f(X_1) + f(X_2).$$

Donc le noyau de f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

L'application

$$\varphi_p : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$

$$(x_1, \dots, x_p) \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme (dit *canonique*).

L'ensemble des solutions du système linéaire S est $\varphi_p^{-1}(\ker f)$.

C'est donc un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^p , car image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.

(ii) L'application

$$f : \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$$

$$y \longmapsto y' - a(t)y$$

est linéaire car elle est combinaison linéaire de l'application de dérivation $y \mapsto y'$ et de l'homothétie $y \mapsto a(t)y$, qui sont linéaires.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - a(t)y = 0$ est le noyau de cette application, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.

(iii) L'application

$$f : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$$

$$y \longmapsto ay'' + by' + cy$$

est linéaire car elle est combinaison linéaire des applications $y \mapsto y''$, $y \mapsto y'$ et $y \mapsto y$, qui sont linéaires. En effet la dérivation seconde est composée deux fois de l'application de dérivation.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ est le noyau de cette application, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. \square

Proposition. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, et b un élément de F .

Alors l'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = b$ d'inconnue $u \in E$ est soit vide, soit un sous-espace affine de E de direction $\ker f$.

Remarques. Une équation de la forme $f(u) = b$ est appelée équation linéaire.

La proposition ci-dessus donne en particulier les résultats suivants :

- (i) L'ensemble des solutions d'un système linéaire est soit vide, soit un sous-espace affine dirigé par l'ensemble des solutions du système homogène associé.
- (ii) L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire est un sous-espace affine dirigé par l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Démonstration. Supposons que l'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = b$ est non-vidé. Il contient alors un vecteur u_1 de E .

Pour tout autre vecteur u de E on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(u) = b &\iff f(u) = f(u_1) \\ &\iff f(u) - f(u_1) = 0_F \\ &\iff f(u - u_1) = 0_F && \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &\iff u - u_1 \in \ker f \\ &\iff u \in u_1 + \ker f \end{aligned}$$

Ceci montre que l'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = b$ d'inconnue $u \in E$ est l'ensemble $u_1 + \ker f$, qui est bien un sous-espace affine de E dirigé par $\ker f$. \square

III. Formes linéaires

A. Définition et exemples

Définition. Une forme linéaire est une application linéaire de E dans \mathbb{K} .

Exemple 5.

(i) Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, z) \mapsto x - 2y + 5z$
 Alors f est linéaire.

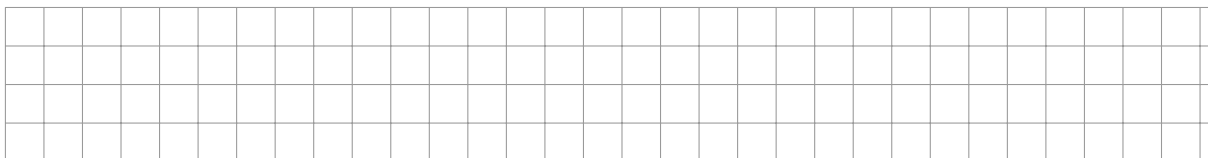
(ii) Spécialisation d'un polynôme, d'une fonction, ou d'une suite :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K} & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R} \\ P \longmapsto P(5) & f \longmapsto f(3) & (u_n) \longmapsto u_6 \end{array}$$

(iii) Par composition l'application suivante est une forme linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto f'(2) \end{array}$$

Proposition. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors pour tout $i = 1, \dots, n$ l'application qui à un vecteur de E associe sa i -ème coordonnée dans la base \mathcal{B} est une forme linéaire :



Définition. Ces formes linéaires sont appelées formes coordonnées relativement à la base \mathcal{B} et notées $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$.

Exemple. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Les formes linéaires coordonnées selon la base canonique de \mathbb{K}^p sont, pour tout $i = 1, \dots, p$:

$$\begin{array}{ccc} e_i^* : \mathbb{K}^p & \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto x_i \end{array}$$

Démonstration. Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{K}^n . Alors les f_i sont les composées $e_i^* \circ f$. On sait que les e_i^* sont linéaires. Par composition, si f est linéaire alors les f_i sont linéaires.

Réciproquement, supposons que les f_i sont linéaires.

Soit u et v deux vecteurs de E et λ un scalaire. Alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= (f_1(\lambda u + v), \dots, f_n(\lambda u + v)) \\ &= (\lambda f_1(u) + f_1(v), \dots, \lambda f_n(u) + f_n(v)) \quad \text{par linéarité des } f_i \\ &= \lambda(f_1(u), \dots, f_n(u)) + (f_1(v), \dots, f_n(v)) \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

Ceci montre que f est linéaire. □

Remarque. Les deux propositions précédentes montrent que toute application linéaire de \mathbb{K}^p dans \mathbb{K}^n (où p et n sont deux entiers naturels non-nuls) est de la forme :

$$f(x_1, \dots, x_p) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p, \dots, a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p)$$

où les a_{ij} pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, p$ sont des scalaires.

Ceci correspond à la multiplication matricielle à gauche :

$$\begin{aligned} m_A : \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

où A est la matrice $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, de taille (n, p) .

Plus précisément, si on note φ_n l'isomorphisme canonique de \mathbb{K}^n dans $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, qui à un vecteur (x_1, \dots, x_n) associe la matrice colonne contenant les x_i , alors $f = \varphi_n^{-1} \circ m_A \circ \varphi_p$. Nous avons démontré que toute application linéaire de \mathbb{K}^p dans \mathbb{K}^n est donnée par une matrice de taille (n, p) .

C. Droites et hyperplans

Définition. Une droite vectorielle est un sous-espace vectoriel engendré par un vecteur non-nul.

Remarque. Si u_0 est un vecteur non-nul d'une droite vectorielle D , alors il engendre D : $D = \text{Vect}(u_0)$.

Exemple. Toute droite de \mathbb{K}^p est de la forme :

$$D = \{(\lambda a_1, \dots, \lambda a_p) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

où $u = (a_1, \dots, a_p)$ est un vecteur non-nul de \mathbb{K}^p .

Définition. Un hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non-nulle de E .

Remarque. Soit H un hyperplan de E . Alors il existe $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ linéaire telle que $H = \ker \varphi$. En particulier H est un sous-espace vectoriel de E .

Exemple. Un hyperplan de \mathbb{K}^p est un ensemble d'équation :

$$a_1x_1 + \cdots + a_px_p = 0$$

où les a_i sont des scalaires non tous nuls.

Si $p = 2$ il s'agit d'une droite vectorielle, si $p = 3$ il s'agit d'un plan vectoriel.

Proposition. Soit H un hyperplan de E .

Alors il existe une droite vectorielle supplémentaire de H dans E .

Plus généralement toute droite vectorielle non contenue dans H est supplémentaire de H dans E : Si $D \not\subseteq H$ alors $E = H \oplus D$.

Démonstration. Comme H est un hyperplan de E alors il existe une forme linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ non-nulle dont H est le noyau.

Comme φ est non-nulle alors il existe $u_0 \in E$ tel que $\varphi(u_0) \neq 0$.

Posons $D = \text{Vect}(u_0)$. Comme $\varphi(u_0)$ est non-nul alors u_0 est non-nul, et donc D est une droite vectorielle.

Démontrons que H et D sont supplémentaires dans E .



Les points (i) et (ii) montrent que H et D sont supplémentaires dans E : $E = H \oplus D$

Si maintenant D est une droite vectorielle non incluse dans H alors elle contient un vecteur u_0 n'appartenant pas H , donc tel que $\varphi(u_0) \neq 0$. On peut donc appliquer ce qui précède : H et D sont supplémentaires dans E . \square

Proposition. *Soit D une droite vectorielle de E . Alors tout supplémentaire de D dans E est un hyperplan de E .*

Démonstration. Soit H un supplémentaire de D dans E .

Comme D est une droite vectorielle alors elle est engendrée par un vecteur non-nul u_0 . Celui-ci forme une base de D . La forme coordonnée u_0^* est alors une forme linéaire de D dans \mathbb{K} , qui au vecteur $u = \lambda u_0$ associe λ .

Notons $\varphi_1 : D \rightarrow \mathbb{K}$ cette application linéaire, et $\varphi_2 : H \rightarrow \mathbb{K}$ l'application nulle de H dans \mathbb{K} .

Comme $E = D \oplus H$ alors il existe une et une seule application linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ dont la restriction à D est φ_1 et la restriction à H est φ_2 .

Soit u un élément de E . Alors u se décompose dans la somme $E = D \oplus H$ en somme $u = \lambda u_0 + v$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $v \in H$. Par définition de φ : $\varphi(u) = \varphi_1(\lambda u_0) + \varphi_2(v) = \lambda$

Ceci montre que $\varphi(u)$ est nul si et seulement si $\lambda = 0$, donc si et seulement si $u \in H$. Ainsi $H = \ker \varphi$.

Or φ est une forme linéaire, non-nulle car $\varphi(u_0) = 1$, donc H est un hyperplan. \square

Proposition. *Soit φ et ψ deux formes linéaires. Si $\ker \varphi = \ker \psi$ alors φ et ψ sont proportionnelles, i.e., il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.*

Remarque. Ainsi, pour tout hyperplan H de E , les formes linéaires dont H est le noyau sont proportionnelles.

Par exemple si un plan vectoriel de \mathbb{R}^3 admet pour équation $ax + by + cz = 0$, alors ses équations sont toutes de la forme $\lambda ax + \lambda by + \lambda cz = 0$ avec $\lambda \neq 0$.

Démonstration. Si φ est nulle alors son noyau est E tout entier. Comme $\ker \varphi = \ker \psi$ alors ψ est nulle également, donc φ et ψ sont proportionnelles.

Supposons que φ est non-nulle. Alors $\ker \varphi$ est un hyperplan que l'on note H .

Il admet une droite vectorielle supplémentaire D , engendrée par un vecteur u_0 non-nul.

Alors $\varphi(u_0) \neq 0$, et comme $\ker \varphi = \ker \psi$ alors $\psi(u_0) \neq 0$. On peut donc définir $\lambda = \frac{\psi(u_0)}{\varphi(u_0)}$.

Ainsi λ est bien défini, c'est un scalaire non-nul. On pose ensuite $f = \psi - \lambda\varphi$.

Par combinaison linéaire f est une forme linéaire. Montrons qu'elle est nulle.

Soit v un élément de H . Alors v est dans le noyau de φ et de ψ , donc :

$$f(v) = \psi(v) - \lambda\varphi(v) = 0$$

Soit w est un élément de D . Alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $w = \alpha u_0$, donc :

$$f(w) = \alpha f(u_0) = \alpha(\psi(u_0) - \lambda\varphi(u_0)) = 0 \quad \text{car} \quad \lambda = \frac{\psi(u_0)}{\varphi(u_0)}$$

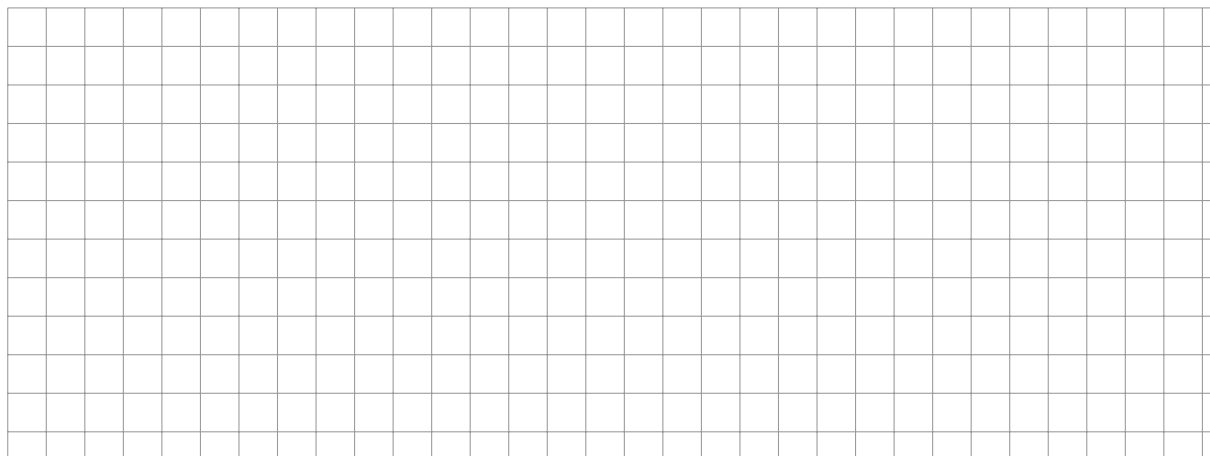
Ainsi f est nulle sur H et D , avec H et D supplémentaires dans E . Une application linéaire sur $E = H \oplus D$ est uniquement déterminée par ses restrictions à H et D , donc f est l'application nulle de E dans \mathbb{K} .

Ceci montre que $\psi = \lambda\varphi$. Or λ est non-nul, donc ψ et φ sont proportionnelles. \square

IV. Projecteurs et symétries

A. Projecteurs

Définition. Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . Pour tout $u \in E$ il existe un unique couple $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$. On appelle projecteur de E sur F parallèlement à G l'application de E dans E qui à u associe v .



Proposition. Soit p le projecteur de E sur F parallèlement à G . Alors

- (i) p est un endomorphisme de E
- (ii) $\text{im } p = F$ et $\text{ker } p = G$.

Démonstration.

- (i) Comme $E = F \oplus G$ alors un endomorphisme de E est uniquement déterminé par ses restrictions à F et à G .

Le projecteur de E sur F parallèlement à G est l'unique endomorphisme de E vérifiant $p|_F(u) = u$ pour tout $u \in F$ et $p|_G(u) = 0_E$ pour tout $u \in G$. C'est donc un endomorphisme.

- (ii) Soit $u \in E$. On note $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$. Alors $p(u) = v$, donc $p(u)$ est élément de F . Ceci montre que $\text{im } p \subseteq F$.

Réciproquement, si v est un élément de F , alors *a fortiori* v est élément de E et sa décomposition selon la somme directe $E = F \oplus G$ est $v = v + 0_E$. Ceci montre que $p(v) = v$, puis que $v \in \text{im } p$. Ainsi $F \subseteq \text{im } p$, et $\text{im } p = F$ par double inclusion.

Si $p(u) = 0_E$ alors $u = w$, donc $u \in G$. Ceci montre que $\text{ker } p \subseteq G$.

Réciproquement, si w est élément de G alors *a fortiori* w est élément de E et sa décomposition selon la somme directe $E = F \oplus G$ est $w = 0_E + w$. Ceci montre que $p(w) = 0_E$, puis que $w \in \text{ker } p$. Ainsi $G \subseteq \text{ker } p$, et $\text{ker } p = G$ par double inclusion. \square

Remarque. On a démontré également que : $\forall v \in F \quad p(v) = v$

Théorème. Soit p un endomorphisme de E . Alors p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$. Dans ce cas p est le projecteur sur $\text{im } p$ parallèlement à $\text{ker } p$.

Lemme. Soit p un endomorphisme de E . Soit F son image et G son noyau.

Si $p \circ p = p$ alors $E = F \oplus G$.

Démonstration.

Démonstration du théorème. Supposons que p est le projecteur sur F parallèlement à G . D'après la proposition précédente $\text{im } p = F$ et $\text{ker } p = G$. Démontrons que $p \circ p = p$.

Soit $u \in E$ et v, w ses composantes selon la somme directe $E = F \oplus G : u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$.

Alors $p(u) = v$, donc $p \circ p(u) = p(v)$. Comme $v \in F$ alors d'après la remarque ci-dessus $p(v) = v$ et donc :

$$p \circ p(u) = v = p(u)$$

Ceci est valable pour tout $u \in E$ donc $p \circ p = p$.

Réciproquement, supposons que p est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$. Posons $F = \text{im } p$ et $G = \text{ker } p$.

D'après le lemme F et G sont supplémentaires.

De plus, si u est élément de E alors $u = p(u) + u - p(u)$, avec $p(u) \in F$ et $u - p(u) \in G$, donc $p(u)$ est bien l'image de u par le projecteur de E sur F parallèlement à G . \square

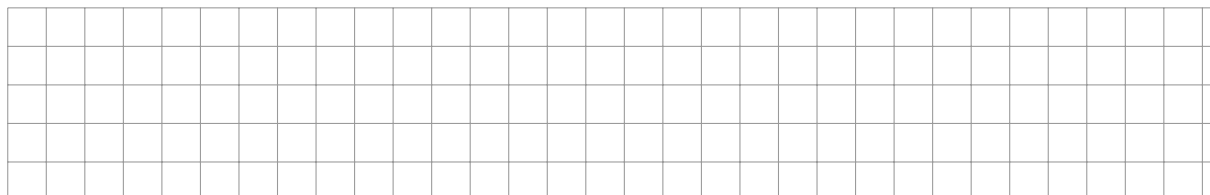
▷ **Exercices 4, 5.**

B. Symétries

Définition. Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . Pour tout $u \in E$ il existe un unique couple $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$. On appelle symétrie de E par rapport à F parallèlement à G l'application de E dans E qui à u associe $v - w$.



Proposition. Soit p le projecteur de E sur F parallèlement à G . Alors



Démonstration. Il suffit d'écrire, pour tout $u \in E$:

$$2p(u) - u = 2v - (v + w) = v - w = s(u) \quad \square$$

Proposition. Soit s la symétrie de E par rapport à F parallèlement à G . Alors

(i) s est un endomorphisme de E .

(ii) $F = \{u \in E \mid s(u) = u\}$ et $G = \{u \in E \mid s(u) = -u\}$.

Démonstration. Soit p le projecteur de E sur F parallèlement à G . Alors $s = 2p - \text{Id}_E$.

(i) Comme p et Id_E sont des endomorphismes de E alors par combinaison linéaire s est un endomorphisme de E .

(ii) On sait que p est un projecteur et $F = \text{im } p$, donc $F = \{u \in E \mid p(u) = u\}$

Par équivalences, pour tout $u \in E$:

$$s(u) = u \iff 2p(u) - u = u \iff p(u) = u \iff u \in F$$

De même $G = \ker p = \{u \in E \mid p(u) = 0\}$. Par équivalences, pour tout $u \in E$:

$$s(u) = -u \iff 2p(u) - u = -u \iff p(u) = 0 \iff u \in G$$

Ceci montre que $F = \{u \in E \mid s(u) = u\}$ et $G = \{u \in E \mid s(u) = -u\}$. □

Théorème. Soit s un endomorphisme de E . Alors s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \text{Id}_E$. Dans ce cas s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G , où $F = \{u \in E \mid s(u) = u\}$ et $G = \{u \in E \mid s(u) = -u\}$.

Démonstration. Si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G , alors pour tout $u \in E$, si $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$ alors :

$$s \circ s(u) = s(v - w) = v - (-w) = u$$

Ceci montre que $s \circ s = \text{Id}_E$.

Réciproquement, supposons que s est un endomorphisme de E tel que $s \circ s = \text{Id}_E$. Posons $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$. On calcule alors :

$$p \circ p = \frac{1}{4}(s \circ s + 2s + \text{Id}_E) = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E) = p$$

D'après le théorème de caractérisation des projecteurs, p est le projecteur de E sur $F = \text{im } p$ parallèlement à $G = \ker p$. Comme $s = 2p - \text{Id}_E$, alors s est la symétrie de E par rapport à F parallèlement à G . \square

Remarque. Une symétrie est bijective, égale à sa propre réciproque.

▷ **Exercice 6.**