

**Feuille de T. D. B9**  
**Applications linéaires**

\_\_\_\_\_ **Exercices de cours** \_\_\_\_\_

① Démontrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer leurs noyaux et images.

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto (3x - y, x + 2y + z)$$

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \longmapsto (x - y, 3x + 3y, x + 2y)$$

② Mêmes questions avec :

$$f : \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K} \quad g : \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K}_2[X]$$

$$P \longmapsto P(2) \quad P \longmapsto P'$$

③ Parmi les applications linéaires proposées dans les deux exercices précédents, lesquelles sont injectives ? Surjectives ?

④ Soit  $p$  l'endomorphisme de  $E = \mathbb{R}^3$  défini par  $\forall (x, y, z) \in E$

$$p(x, y, z) = (x + y - z, x + y - z, x + y - z)$$

Démontrer que  $p$  est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques.

⑤ Soit  $a = (a_1, \dots, a_n)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  vérifiant :

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$$

a. Démontrer que l'application

$$p : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \left( \sum_{k=1}^n a_k x_k \right) a$$

est un endomorphisme de  $E = \mathbb{R}^n$ .

b. Démontrer que  $p$  est un projecteur sur une droite vectorielle parallèlement à un hyperplan.

⑥ Soit  $s$  l'endomorphisme de  $E = \mathbb{R}^2$  défini par :

$$\forall (x, y) \in E \quad s(x, y) = (x, -2x - y)$$

Démontrer que  $s$  est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

\_\_\_\_\_ **Travaux dirigés** \_\_\_\_\_

① Soit  $E$  l'espace vectoriel des suites arithmétiques à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Démontrer que l'application

$$f : E \longrightarrow \mathbb{K}^2$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (u_0, u_1 - u_0)$$

est un isomorphisme.

② Démontrer que les applications suivantes sont linéaires. Calculer leurs noyaux et leurs images. Déterminer ensuite les dimensions de ces noyaux et images.

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \longmapsto (x - y, x + y, x + 2y)$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (x - y, 2x - y)$$

$$f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \longmapsto 3x + y - 5z$$

$$f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$x \longmapsto (4x, 0, -x, x/2)$$

$$f_5 : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$(x_1, \dots, x_5) \longmapsto (0, 0, x_2, 0)$$

$$f_6 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto a + d$$

$$f_7 : \mathbb{K}_3[X] \longrightarrow \mathbb{K}_3[X]$$

$$P \longmapsto XP' - 3P$$

$$f_8 : \mathbb{K}_3[X] \longrightarrow \mathbb{K}^2$$

$$P \longmapsto (P(1), P(2))$$

$$f_9 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

$$u \longmapsto (u_{n+1}) - (u_n)$$

③ Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  linéaire telle que

$$f(1, 0, 0) = (1, -1, 0)$$

$$f(0, 1, 0) = (1, 1, 0)$$

$$f(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$$

a. Justifier que  $f$  est uniquement déterminée et donner  $f(x, y, z)$  pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

b. Démontrer que  $f$  est un automorphisme et déterminer  $f^{-1}$ .

④ Pour tout  $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  on note :

$$\varphi(y) = y'' - 4y' + 20y$$

a. Justifier que  $\varphi$  est une application linéaire de  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ .

b. Déterminer le noyau de  $\varphi$  et sa dimension.

⑤ Soit  $E, F, G$  trois espaces vectoriels et

$$f : E \rightarrow F \quad g : F \rightarrow G$$

deux applications linéaires.

a. Démontrer que l'application  $g \circ f$  est nulle si et seulement si  $\text{im } f \subseteq \ker g$ .

b. Démontrer que :

$$\ker f \subseteq \ker g \circ f \quad \text{et} \quad \text{im } g \circ f \subseteq \text{im } g$$

c. En déduire que si  $g \circ f$  est un isomorphisme alors  $f$  est injective et  $g$  est surjective.

**6** Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$ . On note  $f^2 = f \circ f$ . Démontrer que :

$$\begin{aligned} \ker f &= \ker f^2 &\iff \operatorname{im} f \cap \ker f &= \{0_E\} \\ \operatorname{im} f &= \operatorname{im} f^2 &\iff \operatorname{im} f + \ker f &= E \end{aligned}$$

**7** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Pour tout scalaire  $\lambda$  on note :

$$E_\lambda = \{u \in E \mid f(u) = \lambda u\}$$

- Démontrer que  $E_\lambda$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- Démontrer que si  $\lambda \neq \mu$  alors  $E_\lambda$  et  $E_\mu$  sont en somme directe.

**8** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant :

$$f \circ f = 3f - 2\operatorname{Id}_E$$

- Démontrer que  $f$  est un automorphisme et exprimer son inverse en fonction de  $f$ .

On utilise la définition de  $E_\lambda$  donnée dans l'exercice précédent.

- Démontrer que :

$$\operatorname{im}(f - \operatorname{Id}_E) \subseteq E_2 \quad \text{et} \quad \operatorname{im}(f - 2\operatorname{Id}_E) \subseteq E_1$$

- Soit  $u$  un vecteur de  $E$ . Démontrer que  $u$  est combinaison linéaire de  $f(u) - u$  et  $f(u) - 2u$ .
- Démontrer que :  $E_1 \oplus E_2 = E$

**9** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E = \mathbb{R}^3$  défini par :

$$f(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z)$$

On utilise encore la définition de  $E_\lambda$  de l'exercice 7.

- Donner une base de  $E_1$  et de  $E_4$ .
- Démontrer que  $E_1$  et  $E_4$  sont supplémentaires dans  $E$ .
- En déduire que :  $f \circ f = 5f - 4\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}$

**10** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . On suppose que pour tout  $u \in E$  la famille  $(u, f(u))$  est liée.

- Démontrer que pour tout  $u \in E$  non-nul il existe un unique  $\lambda_u \in \mathbb{K}$  tel que  $f(u) = \lambda_u u$ .
- Soit  $u$  et  $v$  deux vecteurs linéairement indépendants. Démontrer que  $\lambda_u = \lambda_v$ .
- Démontrer que  $f$  est une homothétie.

**11** Pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  on pose :

$$f(x, y, z) = (-x + 2z, -x + y + z, z)$$

$$g(x, y, z) = \frac{1}{2}(x - z, 2y, -x + z)$$

$$h(x, y, z) = \frac{1}{3}(-x + 4z, 2x - 3y + 4z, 2x + z)$$

Démontrer que ces endomorphismes sont des projecteurs ou des symétries, et déterminer leurs éléments caractéristiques.

**12** Donner l'expression de :

- La symétrie de  $\mathbb{R}^2$  par rapport à  $\operatorname{Vect}((1, 0))$  parallèlement à  $\operatorname{Vect}((1, 1))$ ,
- La symétrie de  $\mathbb{R}^2$  par rapport à  $\operatorname{Vect}((3, -1))$  parallèlement à  $\operatorname{Vect}((-7, 3))$ .

**13** Soit  $p$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$ , et  $q = \operatorname{id} - p$ .

- Démontrer que  $p$  est un projecteur si et seulement si  $q$  est un projecteur.
- On suppose que  $p$  est un projecteur. Démontrer que  $\operatorname{im} q = \ker p$  et  $\ker q = \operatorname{im} p$ .

**14** Soit  $p$  un projecteur d'un espace vectoriel  $E$ .

Démontrer qu'un endomorphisme  $f$  de  $E$  commute avec  $p$  si et seulement si  $\ker p$  et  $\operatorname{im} p$  sont stables par  $f$ .

**15** Soit  $E = \mathbb{R}^3$  et  $H = \ker f$  où :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto 3x + y - 2z \end{aligned}$$

On note aussi  $D = \operatorname{Vect}(u_0)$  avec  $u_0 = (1, -1, 2)$ .

- Démontrer que  $E = H \oplus D$ .
- Soit  $u = (x, y, z)$  un vecteur de  $E$ . Pour quelle valeur du scalaire  $\lambda$  le vecteur  $u - \lambda u_0$  appartient-il à  $H$  ?
- Déduire de la question précédente l'expression du projecteur de  $E$  sur  $H$  parallèlement à  $D$ , et de celui sur  $D$  parallèlement à  $H$ .
- Déterminer l'expression de la symétrie de  $E$  par rapport à  $H$  parallèlement à  $D$ .

**16** Dans  $E = \mathbb{R}^4$  on note :

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + y + z + t = 0\}$$

$$G = \operatorname{Vect}((1, 1, 1, 1))$$

- Démontrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ .
- Donner l'expression de la symétrie de  $E$  par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ .

**17** Dans  $E = \mathbb{R}^4$  on note :

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + y = z + t = 0\}$$

$$G = \operatorname{Vect}((1, 1, 1, 1), (1, 1, -1, -1))$$

Démontrer que  $E = F \oplus G$  et donner l'expression du projecteur de  $E$  sur  $F$  parallèlement à  $G$ .

**18** Soit  $p$  et  $q$  deux projecteurs d'un espace vectoriel  $E$  tels que  $p \circ q = q \circ p$ .

- Démontrer que  $p \circ q$  est un projecteur et que :
 
$$\begin{aligned} \operatorname{im}(p \circ q) &= \operatorname{im} p \cap \operatorname{im} q \\ \ker(p \circ q) &= \ker p + \ker q \end{aligned}$$
- Démontrer que si  $\operatorname{im} p = \operatorname{im} q$  alors  $p = q$ .
- Démontrer que si  $p \circ q = 0$  alors  $p + q$  est un projecteur.
- Réciproquement, démontrer que si  $p, q$  et  $p + q$  sont des projecteurs de  $E$  alors :

$$p \circ q = q \circ p = 0$$

- Démontrer que dans la situation des deux questions précédentes :

$$\operatorname{im}(p + q) = \operatorname{im} p \oplus \operatorname{im} q$$

$$\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$$