

## Chapitre A8

# Développements limités

## I. Généralités

Cadre

Dans toute cette partie  $f$  est une fonction définie sur une partie  $D$  de  $\mathbb{R}$  telle que :

- Ou bien  $D$  est un intervalle non réduit à un point contenant 0.
  - Ou bien  $D$  est un tel intervalle privé de 0.

Ceci signifie que  $f$  peut admettre une limite en 0.

Dans tout ce chapitre  $n$  désigne un entier naturel.

## A. Définition

## Définition

On dit que  $f$  admet un *développement limité en 0 à l'ordre n* s'il existe des réels  $c_0, c_1, \dots, c_n$  tels que :

**Remarque.** On peut aussi écrire :

## Exemples.

(i) Développement limité de  $\frac{1}{1-x}$  en 0.

(ii) La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  n'admet pas de développement limité en 0 à l'ordre 1.



## B. Propriétés

### Lemme 1

Une fonction  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n = 0$  en 0 si et seulement si elle admet une limite finie en 0. Ce développement limité est alors

$$f(x) = c_0 + o(1) \quad \text{avec} \quad c_0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

Démonstration. La fonction  $f$  admet un développement limité en 0 si et seulement si il existe un réel  $c_0$  tel que  $f(x) = c_0 + \varepsilon(x)$ , où  $\varepsilon$  est une fonction admettant 0 pour limite en 0. Ceci équivaut à : il existe  $c_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = c_0$ .

Cette dernière propriété signifie exactement que  $f$  admet une limite finie en 0. □

### Proposition

Supposons que  $f$  est définie en 0, i.e.,  $0 \in D$ .

- La fonction  $f$  admet un développement limité à l'ordre 0 en 0 si et seulement si elle est continue en 0.
- La fonction  $f$  admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 si et seulement si elle est dérivable en 0.

### Remarques.

- Ceci ne se généralise pas aux ordres supérieurs.

Par exemple l'existence d'un développement limité à l'ordre 2 n'implique pas la dérivabilité seconde de  $f$ .

- Les deux sens de ces équivalences sont donnés par les deux lemmes suivants.

**Lemme 2**

Supposons que  $f$  est définie en 0.

(i) Si  $f$  est continue en 0 alors  $f$  admet le développement limité

$$f(x) \underset{(0)}{=} f(0) + o(1).$$

(ii) Si  $f$  est dérivable en 0 alors  $f$  admet le développement limité

$$f(x) \underset{(0)}{=} f(0) + f'(0)x + o(x).$$

Démonstration.

(i) Si  $f$  est continue en 0 alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$ , donc  $f(x) - f(0) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .

Ainsi  $f(x) - f(0) \underset{(0)}{=} o(1)$ , et donc :  $f(x) \underset{(0)}{=} f(0) + o(1)$ .

Il s'agit bien d'un développement limité de  $f$  à l'ordre 0 en 0.

(ii) Si  $f$  est dérivable en 0 alors  $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} f'(0)$ , donc  $\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .

Ainsi  $f(x) - f(0) - f'(0)x \underset{(0)}{=} o(x)$ , donc :  $f(x) \underset{(0)}{=} f(0) + f'(0)x + o(x)$ .

Il s'agit bien d'un développement limité de  $f$  à l'ordre 1 en 0.  $\square$

**Lemme 3**

Supposons que  $f$  est définie en 0.

(i) Si  $f$  admet le développement limité  $f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + o(1)$  en 0 alors  $f$  est continue en 0 et  $c_0 = f(0)$ .

(ii) Si  $f$  admet le développement limité  $f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1x + o(x)$  en 0 alors  $f$  est dérivable en 0, et  $c_0 = f(0)$ ,  $c_1 = f'(0)$ .

Démonstration.

(i) Nous verrons dans le chapitre A10 (Limites et continuité) que, pour une fonction  $f$  définie en 0 :

$$f \text{ est continue en } 0 \iff f \text{ admet une limite finie en } 0$$

Donc ce point est conséquence du lemme 1.

(ii) On suppose que  $f$  admet en 0 le développement limité suivant à l'ordre 1 :

$$f(x) = c_0 + c_1x + x\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Alors  $f(0) = c_0$  d'après le point précédent, et

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = c_1 + \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} c_1.$$

Donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = c_1$ .  $\square$

**Proposition (Troncature d'un développement limité)**

Supposons que  $f$  admet en 0 le développement limité suivant :

$$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Soit  $k$  un entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$ . Alors  $f$  admet en 0 le développement limité suivant à l'ordre  $k$  :

$$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k + x^k\varepsilon_2(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Démonstration. On écrit :

$$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k + x^k(c_{k+1}x + c_{k+2}x^2 + \cdots + c_nx^{n-k} + x^{n-k}\varepsilon(x)).$$

Soit  $\varepsilon_2(x) = c_{k+1}x + c_{k+2}x^2 + \cdots + c_nx^{n-k} + x^{n-k}\varepsilon(x)$ .

Alors  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$ , donc  $f$  admet bien un développement limité en 0 à l'ordre  $k$ , celui-ci est la restriction du développement limité à l'ordre  $n$ .  $\square$

**Proposition (Unicité d'un développement limité)**

Si  $f$  admet un développement limité en 0 à l'ordre  $n$  alors ce développement limité est unique.

Démonstration.

**Proposition (Parité des développements limités)**

Soit  $f$  une fonction admettant un développement limité en 0. Si  $f$  est paire alors ce développement limité est de la forme :

$$f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \cdots + c_{2k} x^{2k} + o(x^{2k}) \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}.$$

Si  $f$  est impaire alors ce développement limité est de la forme :

$$f(x) \underset{(0)}{=} c_1 x + c_3 x^3 + \cdots + c_{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2k+1}) \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}.$$

Démonstration.

**Définition**

Soit  $f$  une fonction admettant un développement limité en 0. Soit  $p$  l'indice du plus petit coefficient non-nul de ce développement limité. On peut alors écrire

$$f(x) \underset{(0)}{=} x^p (a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + o(x^m)) \quad \text{avec } a_0 \neq 0.$$

Cette écriture est la *forme normalisée* du développement limité de  $f$  en 0.

Le monôme  $a_0 x^p$  est le *terme prépondérant* du développement limité.

**Proposition**

Le développement limité ci-dessus implique l'équivalence :  $f(x) \underset{(0)}{\sim} a_0 x^p$ .

## C. Développements limités des fonctions usuelles

### Théorème

Les développements limités suivants en 0 sont valables pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemple 1.** Développement limité de  $(1 + x)^\alpha$  pour  $\alpha = 0, 1, 2, 3, -1, \frac{1}{2}$ .

► **Exercice 1.**

## II. Calculs de développements limités

### A. Opérations

**Exemple 2.**

- (i) Développement limité de  $e^{3x}$  en 0 à l'ordre 4.
- (ii) Développement limité de  $\ln(1 - x)$  en 0 à l'ordre 5.
- (iii) Développement limité de  $\frac{1}{1-x^2}$  en 0 à l'ordre 5.
- (iv) (Addition de DL) Développement limité de  $e^x + e^{3x}$  en 0 à l'ordre 4.
- (v) (Multiplication de DL) Développement limité de  $e^x \cos x$  en 0 à l'ordre 4.

► **Exercices 2, 3, 4.**

**Exemple 3.**

- (i) Développement limité de  $\frac{1}{3+x}$  en 0 à l'ordre 3.
- (ii) Développement limité de  $\ln(2 - x)$  en 0 à l'ordre 3.

► **Exercice 5.**

**Exemple 4.**

- (i) Développement limité de  $\exp(2x - x^2)$  en 0 à l'ordre 4.
- (ii) (Composition de développements limités)  $\ln(\cos x)$  en 0 à l'ordre 5.
- (iii) (Quotient de développements limités)  $\frac{1}{\cos x}$  en 0 à l'ordre 5.
- (iv) Développement limité de  $\tan x$  en 0 à l'ordre 5.

► **Exercice 6.**

**Remarque : manipulation des petits o.**

$o(3x^2) \underset{(0)}{=}$	$o(x^2) + o(x^3) \underset{(0)}{=}$	$o(x^2 + x^3) \underset{(0)}{=}$
$x^4 o(x^3) \underset{(0)}{=}$	$o(x^4)o(x^3) \underset{(0)}{=}$	$x^4 + o(x^3) \underset{(0)}{=}$

### B. Primitivation

#### Théorème (Primitivation de développements limités)

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  contenant 0. On suppose que  $f'$  admet le développement limité à l'ordre  $n$  :

$$f'(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n).$$

Alors  $f$  admet le développement limité suivant à l'ordre  $n + 1$  :

$$f(x) \underset{(0)}{=} f(0) + c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + c_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

Démonstration. Admise pour l'instant. Nécessite le théorème des accroissements finis (chapitre A11 : Dérivation).

**Exemple 5.** Démonstration de la formule du développement limité de  $\ln(1 + x)$ .

**Exemple 6.**

(i) Développement limité de la fonction arcsin en 0 à l'ordre 5.

(ii) Développement limité de la fonction arctan en 0 à l'ordre  $2n + 1$ .

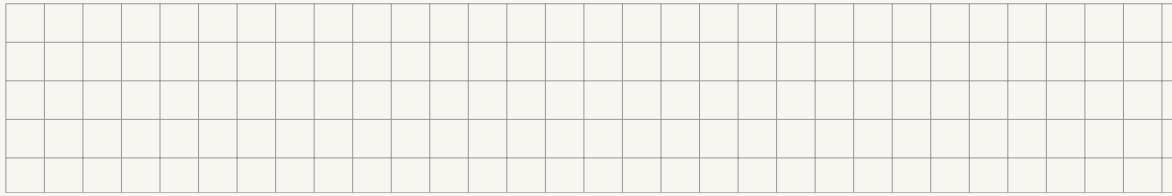
## C. Formule de Taylor-Young

**Rappel.**

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Une fonction est *de classe  $\mathcal{C}^n$*  si elle est  $n$  fois dérivable et sa dérivée  $n$ -ème est continue.
- Une fonction est *de classe  $\mathcal{C}^\infty$*  si elle est dérivable  $n$  fois pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### Lemme (Formule de Taylor-Young en 0)

Soit  $n$  un entier naturel et  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  en 0. Alors  $f$  admet le développement limité :



**Exemple 7.** Cas  $n = 0, 1, 2$ .

Démonstration.

## Corollaire

Une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un intervalle  $I$  admet un développement limité à tout ordre en tout point de  $I$ .

**Exemple 8.** Démonstration des formules donnant les développements limités des fonctions exponentielle, sinus, cosinus, et  $x \mapsto (1 + x)^\alpha$ .

### III. Développement limité au voisinage d'un point quelconque

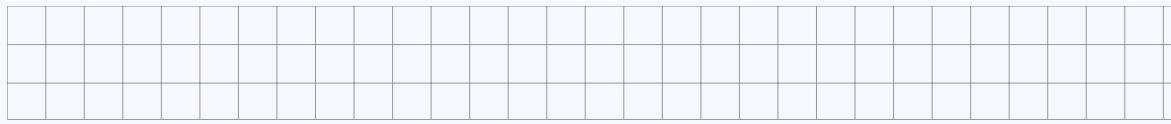
Cadre

Soit  $a$  un réel. Dans cette partie  $f$  est une fonction définie sur une partie  $D$  de  $\mathbb{R}$  telle que :

- Ou bien  $D$  est un intervalle non réduit à un point contenant  $a$ .
  - Ou bien  $D$  est un tel intervalle privé de  $a$ .

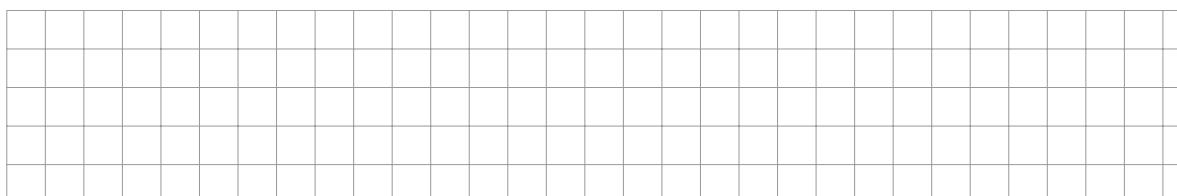
## Définition

On dit que  $f$  admet un *développement limité en  $a$  à l'ordre  $n$*  s'il existe des scalaires  $c_0, c_1, \dots, c_n$  tels que :

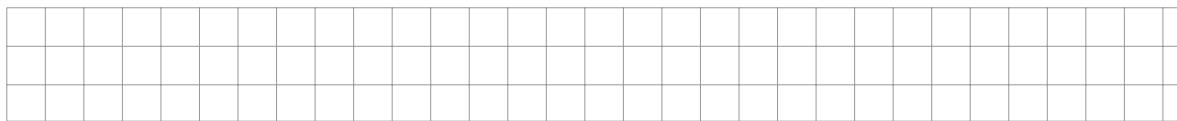


## Remarques.

- De façon équivalente :



Ou encore, pour tout  $h$  tel que  $a + h \in D$  :



- Les propriétés d'unicité et de troncature sont toujours valables.

**Méthode**

Pour obtenir un développement limité d'une fonction au voisinage d'un point  $a$ , on pose  $h = x - a$  et on calcule un développement limité de  $h \mapsto f(a + h)$  au voisinage de  $h = 0$ .

**Exemple 9.**

- (i) Développement limité de  $\frac{1}{x}$  au voisinage de  $a = 2$  à l'ordre 2.
- (ii) Développement limité de  $e^x$  au voisinage de  $a = 4$  à l'ordre 2.
- (iii) Développement limité de  $\cos x$  à l'ordre 3 en  $a = \frac{\pi}{3}$ .

**► Exercice 7.****Théorème (Primitivation de développements limités)**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , et soit  $a$  un point de  $I$ . Supposons que  $f'$  admet le développement limité à l'ordre  $n$  :

$$f'(x) \underset{(a)}{=} c_0 + c_1(x - a) + \cdots + c_n(x - a)^n + o((x - a)^n).$$

Alors  $f$  admet le développement limité suivant à l'ordre  $n + 1$  :

$$f(x) \underset{(a)}{=} f(a) + c_0(x - a) + c_1 \frac{(x - a)^2}{2} + \cdots + c_n \frac{(x - a)^{n+1}}{n+1} + o((x - a)^{n+1}).$$

**Théorème (Formule de Taylor-Young)**

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  en  $a$ . Alors  $f$  admet le développement limité :

$$f(x) \underset{(a)}{=} f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a) \frac{(x - a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a) \frac{(x - a)^n}{n!} + o((x - a)^n).$$

**► Exercice 8.**

## IV. Applications

## A. Calculs de limites

### Exemple 10.

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x - \ln(1 + x)}$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$$

## ► Exercice 9.

## B. Tangentes

**Remarque.** D'après la formule de Taylor-Young, si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  en  $a$  alors :

$$f(x) = \underset{(a)}{f(a)} + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2).$$

Ceci montre que le développement limité d'une fonction à l'ordre 1 donne la tangente à la courbe. Le terme suivant donne la position de la courbe par rapport à cette tangente.

► Exercices 10, 11.

## C. Développement asymptotique

## Définition

Un *développement asymptotique* d'une fonction est un développement limité en  $\pm\infty$ , obtenu en posant  $h = \frac{1}{x}$ .

Il peut contenir des termes non polynomiaux.

### Exemple 11.

(i) Développement asymptotique de  $f(x) = \frac{2x^2 + 5}{x + 3}$  en  $\pm\infty$  à l'ordre 2.

(ii) Comportement asymptotique de  $u_n = \sqrt[n]{n}$ .

► Exercices 12, 13.

## Proposition : Formule de Stirling

**Exemple 12.** On peut en déduire le développement asymptotique suivant :

$$\ln(n!) \underset{(+\infty)}{=}$$

► Exercice 14.