

**Feuille de T. D. A10**  
**Développements limités**

\_\_\_\_\_ **Exercices de cours** \_\_\_\_\_

① Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 3x + x^3 \sin \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- a. Démontrer que la fonction  $f$  possède un développement limité en 0 à l'ordre 2.  
b. Justifier que la fonction  $f$  est dérivable en 0.  
c. La fonction  $f$  est-elle deux fois dérivable en 0 ?

② Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ .

③ Calculer par produit le développement limité de  $e^x(1+e^{2x})$  en 0 à l'ordre 4 et vérifier ainsi l'un des développements limités calculés précédemment.

④ Donner les développements limités de  $\frac{1}{1+x}$  et de  $\frac{1}{1-x}$  à l'ordre 5. Calculer la somme, puis le produit de ces développements limités et vérifier ainsi deux fois l'un des développements limités calculés précédemment.

⑤ Donner un développement limité de  $\cos(2x)$  en 0 à l'ordre 6 en utilisant le développement limité de  $\cos u$ , puis la formule  $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ .

⑥ Calculer les développements limités de :

- a.  $e^{2+x}$  en 0 à l'ordre 3  
b.  $\sqrt{4+x}$  en 0 à l'ordre 2.

⑦ Donner les développements limités des fonctions suivantes en 0 à l'ordre 3 :

- a.  $\ln(e^{-x} + 1)$                       b.  $\frac{1}{\cos x - \sin x}$

⑧ Donner un développement limité en 4 à l'ordre 2 de  $f : x \mapsto \sqrt{x+5}$ .

⑨ À l'aide de la formule de Taylor-Young, donner le développement limité de la fonction  $\sin$  en  $a = -\frac{\pi}{4}$  à l'ordre 3.

⑩ Calculer :

- a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - e^{-x})}{e^x + e^{-x} - 2}$                       b.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}}{\ln(x) - \ln(2-x)}$

⑪ On considère :  $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ .

- a. Donner un développement limité de  $g(h) = \frac{1}{(1+h)^2}$  à l'ordre 3 en 0.  
b. Donner un développement limite de  $f$  en 0 et en 1 à l'ordre 2.  
c. Donner un développement limite de  $f$  en 2 à l'ordre 3.

Dans ces trois cas, donner la tangente à la courbe de  $f$  et la position de la courbe par rapport à cette tangente.

⑫ Donner un développement limité en 2 à l'ordre 1 de :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}.$$

Démontrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 2 et que ce prolongement par continuité est dérivable.

⑬ Décrire le comportement asymptotique en  $+\infty$  de :

$$f(x) = \sqrt{1+x+x^2}.$$

⑭ Décrire le comportement asymptotique de la suite :

$$u_n = \left( \frac{n + \ln n}{n} \right)^n.$$

⑮ Donner un équivalent en  $+\infty$  de  $\binom{2n}{n}$ .

\_\_\_\_\_ **Travaux dirigés** \_\_\_\_\_

① Calculer, dans chacun des cas suivants, le développement limité à l'ordre  $n$  de  $f_i(x)$  en 0.

$n = 5$                        $f_1(x) = \sin(x - x^2)$

$n = 4$                        $f_2(x) = e^{\frac{x}{2}} \operatorname{sh} 2x$

$n = 6$                        $f_3(x) = (1 - \cos x)^2$

$n = 6$                        $f_4(x) = \arccos x$

$n = 2$                        $f_5(x) = \frac{x^2}{x - \ln(1+x)}$

$n = 5$                        $f_6(x) = \frac{\arcsin 2x}{x}$

$n = 3$                        $f_7(x) = \ln(1 + x\sqrt{1+6x})$

$n = 5$                        $f_8(x) = \operatorname{th} x$

$n = 6$                        $f_9(x) = \cos^5 x$

$n = 6$                        $f_{10}(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} dt$

$n = 5$                        $f_{11}(x) = \arctan 2x + \ln \frac{1-x}{1+x}$

**2** Développement limité de la tangente en 0.

- Donner le développement limité de la fonction tangente en 0 à l'ordre 0.
- Sachant que  $\tan' x = 1 + \tan^2 x$ , calculer par intégrations successives le développement limité de  $\tan x$  en 0 à l'ordre 1, puis 3, puis 5.

**3** Variante du précédent.

- Justifier que la fonction tangente admet un développement limité en 0 de la forme :

$$\tan x \underset{(0)}{=} a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5).$$

- Sachant que  $\tan' x = 1 + \tan^2 x$ , déterminer les valeurs de  $a_1, a_3, a_5$ .

**4** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

- Démontrer que  $f$  est prolongeable par continuité sur  $\mathbb{R}$  et que ce prolongement est deux fois dérivable.
- En utilisant la fonction  $g(x) = x - 1 + e^{-x}$ , étudier les variations de  $f$ .
- Décrire le comportement de  $f$  au voisinage de 0. Tracer l'allure de sa courbe.

**5** Calculer, dans chacun des cas suivants, le développement limité à l'ordre  $n$  de  $f_i(x)$  en  $a$ .

Décrire la courbe de  $f_i$  au voisinage du point  $a$ .

$$n = 3 \quad a = \frac{3\pi}{8} \quad f_1(x) = \cos 2x$$

$$n = 3 \quad a = -3 \quad f_2(x) = \frac{1}{x}$$

$$n = 3 \quad a = +\infty \quad f_3(x) = \frac{1}{x+2}$$

$$n = 2 \quad a = \ln 3 \quad f_4(x) = \operatorname{sh} x$$

$$n = 4 \quad a = 1 \quad f_5(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$n = 2 \quad a = \frac{\pi}{4} \quad f_6(x) = \tan x$$

$$n = 4 \quad a = 1 \quad f_7(x) = \arctan x$$

$$n = 4 \quad a = 1 \quad f_8(x) = \arcsin x$$

$$n = 2 \quad a = 2 \quad f_9(x) = 2^x$$

$$n = 2 \quad a = 2 \quad f_{10}(x) = \frac{8-2x-x^2}{3+x-x^2}$$

$$n = 2 \quad a = -1 \quad f_{11}(x) = \frac{\sqrt{5+7x+3x^2}-1}{x+1}$$

$$n = 3 \quad a = -\infty \quad f_{12}(x) = \frac{x+2}{x^2-3x+1}$$

$$n = 4 \quad a = +\infty \quad f_{13}(x) = \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+2}$$

**6** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Justifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $f(x) \underset{(0)}{=} o(x^n)$
- Démontrer que  $f$  admet un développement limité en 0 à tout ordre mais que ce développement limité est nul.

**7** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer le développement limité de  $f(x)$  en 0 à l'ordre  $n+1$  où :

$$f(x) = \ln \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right).$$

**8** Soit  $f(x) = xe^{x^2}$ .

- Démontrer que  $f$  réalise une bijection de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .
- Justifier que  $f^{-1}$  admet un développement limité à tout ordre en 0 et donner ce développement limité à l'ordre 5.

**9** Calculer les limites suivantes.

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan x - \tan(3x)}{x(1 - \cos(3x))}$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\operatorname{ch} x - \cos x) - 3(\operatorname{sh} x - \sin x)}{x^7}$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) \quad \text{d. } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x}{\operatorname{sh} x} - \frac{e^{-x}}{\sin x} \right)$$

$$\text{e. } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} + \cos x - \frac{1}{2} \cos^2 x \right)^{\frac{1}{x^4}}$$

$$\text{f. } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{2}{1 - \cos 2x} \right) \quad \text{g. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos 2x - e^{-2x^2}}$$

$$\text{h. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \arcsin x}{\sin x - \arctan x} \quad \text{i. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\ln x}$$

$$\text{j. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{1 - 2 \cos(2x)} \quad \text{k. } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{\cos 2x + \sin 4x}$$

$$\text{l. } \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} \quad \text{m. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-2}}{\sqrt[3]{x-1}-1}$$

$$\text{n. } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\pi - 3 \arccos x}{4x^3 - x}$$

$$\text{o. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 7} - \sqrt{x^2 + 5}$$

$$\text{p. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{x^{10} + x^5 + 1} - x^2}{\sqrt[4]{x^4 + 1} + x}$$

**10** Déterminer le comportement asymptotique des fonctions suivantes en  $\pm\infty$ .

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1} \quad f_2(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1}$$

$$f_3(x) = \sqrt{(x-1)(x-3)} + 2$$

$$f_4(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{2(x-1)^2} \quad f_5(x) = \sqrt[3]{x^2(1-8x)}$$

$$f_6(x) = \sqrt[3]{8x^3 + x^2} - \sqrt{9x^2 + x}$$

$$f_7(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x}} \quad f_8(x) = x e^{\frac{1}{x+1}}$$

$$f_9(x) = \frac{(x+1) \ln(1+x)}{\ln x} \quad f_{10}(x) = \ln \operatorname{ch} x$$

**11** Donner un développement asymptotique à l'ordre  $k$  des suites suivantes.

$$k = 2 \quad u_n = \frac{n-1}{2n-3} \quad k = 3 \quad v_n = \arctan n$$

$$k = 3 \quad w_n = \arctan \left( n + \frac{1}{n} \right)$$

$$k = 2 \quad x_n = \tan \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} \right) \quad k = 2 \quad y_n = \left( \frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$k = 2 \quad z_n = \sqrt[n]{n^2 + 3n + 1}$$

**12** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose :

$$u_n = \prod_{k=2n}^{3n} k.$$

À l'aide de la formule de Stirling donner un équivalent simple de  $u_n$  en  $+\infty$  puis de  $\sqrt[n]{u_n}$ .

On pourra considérer  $\frac{u_n}{2n}$ .