Feuille de T. D. A10
Développements limités

Exercices de cours

1 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 3x + x^3 \sin \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a. Démontrer que la fonction f possède un développement limité en 0 à l'ordre 2.

b. Justifier que la fonction f est dérivable en 0.

c. La fonction f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

2 Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$.

3 Calculer par produit le développement limité de $e^x(1+e^{2x})$ en 0 à l'ordre 4 et vérifier ainsi l'un des développements limités calculés précédemment.

4 Donner les développements limités de $\frac{1}{1+x}$ et de $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 5. Calculer la somme, puis le produit de ces développements limités et vérifier ainsi deux fois l'un des développements limités calculés précédemment.

5 Donner un développement limité de $\cos(2x)$ en 0 à l'ordre 6 en utilisant le développement limité de $\cos u$, puis la formule $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$.

6 Calculer les développements limités de :

a. e^{2+x} en 0 à l'ordre 3

b. $\sqrt{4+x}$ en 0 à l'ordre 2.

7 Donner les développements limités des fonctions suivantes en 0 à l'ordre 3 :

a. $\ln(e^{-x}+1)$ b. $\dfrac{1}{\cos x - \sin x}$

8 Donner un développement limité en 4 à l'ordre 2 de $f : x \mapsto \sqrt{x+5}$.

9 À l'aide de la formule de Taylor-Young, donner le développement limité de la fonction sin en $a = -\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 3.

10 Calculer :

a. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x - e^{-x})}{e^x + e^{-x} - 2}$ b. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}}{\ln(x) - \ln(2-x)}$

11 On considère : $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.

a. Donner un développement limité de $g(h) = \frac{1}{(1+h)^2}$ à l'ordre 3 en 0.

b. Donner un développement limite de f en 0 et en 1 à l'ordre 2.

c. Donner un développement limite de f en 2 à l'ordre 3.

Dans ces trois cas, donner la tangente à la courbe de f et la position de la courbe par rapport à cette tangente.

12 Donner un développement limité en 2 à l'ordre 1 de :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}.$$

Démontrer que f est prolongeable par continuité en 2 et que ce prolongement par continuité est dérivable.

13 Décrire le comportement asymptotique en $+\infty$ de :

$$f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}.$$

14 Décrire le comportement asymptotique de la suite :

$$u_n = \left(\frac{n + \ln n}{n}\right)^n.$$

15 Donner un équivalent en $+\infty$ de $\binom{2n}{n}$.

Travaux dirigés

1 Cet exercice propose deux méthodes rapides pour obtenir le développement limité de la fonction tangente en 0.

Les deux questions sont indépendantes et utilisent toutes les deux la formule $\tan' x = 1 + \tan^2 x$.

a. Donner le développement limité de la fonction tangente en 0 à l'ordre 0.

En déduire par intégrations successives le développement limité de la fonction tangente en 0 à l'ordre 1, puis 3, puis 5.

b. Justifier que la fonction tangente admet un développement limité en 0 de la forme :

$$\tan x \underset{(0)}{=} a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5).$$

Déterminer les valeurs de a_1, a_3, a_5.

2 Calculer, dans chacun des cas suivants, le développement limité à l'ordre n de $f_i(x)$ en 0 :

$n = 5 \quad f_1(x) = \sin(x - x^2)$

$n = 4 \quad f_2(x) = e^{\frac{x}{2}} \operatorname{sh} 2x$

$n = 6 \quad f_3(x) = \arccos x$

$n = 5 \quad f_4(x) = \dfrac{\arcsin 2x}{x}$

$n = 6 \quad f_5(x) = (1 - \cos x)^2$

$n = 2 \quad f_6(x) = \dfrac{x^2}{x - \ln(1+x)}$

$n = 3 \quad f_7(x) = \ln\left(1 + x\sqrt{1+6x}\right)$

$n = 5 \quad f_8(x) = \operatorname{th} x$

$n = 6 \quad f_9(x) = \cos^5 x$

$n = 6 \quad f_{10}(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$

$n = 5 \quad f_{11}(x) = \arctan 2x + \ln \dfrac{1-x}{1+x}$

3 Calculer, dans chacun des cas suivants, le développement limité à l'ordre n de $f_i(x)$ en a.
Décrire la courbe de f_i au voisinage du point a.

$n = 3 \quad a = \frac{3\pi}{8} \quad f_1(x) = \cos 2x$

$n = 3 \quad a = -3 \quad f_2(x) = \dfrac{1}{x}$

$n = 3 \quad a = +\infty \quad f_3(x) = \dfrac{1}{x+2}$

$n = 2 \quad a = \ln 3 \quad f_4(x) = \operatorname{sh} x$

$n = 4 \quad a = 1 \quad f_5(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

$n = 2 \quad a = \frac{\pi}{4} \quad f_6(x) = \tan x$

$n = 4 \quad a = 1 \quad f_7(x) = \arctan x$

$n = 4 \quad a = 1 \quad f_8(x) = \arcsin x$

$n = 2 \quad a = 2 \quad f_9(x) = 2^x$

$n = 2 \quad a = 2 \quad f_{10}(x) = \dfrac{8 - 2x - x^2}{3 + x - x^2}$

$n = 2 \quad a = -1 \quad f_{11}(x) = \dfrac{\sqrt{5 + 7x + 3x^2} - 1}{x+1}$

$n = 3 \quad a = -\infty \quad f_{12}(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 3x + 1}$

$n = 4 \quad a = +\infty \quad f_{13}(x) = \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+2}$

4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(x) \underset{(0)}{=} o(x^n)$

b. Démontrer que f admet un développement limité en 0 à tout ordre mais que ce développement limité est nul.

5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

a. Démontrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$. On note toujours f ce prolongement.

b. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

c. Démontrer que f est deux fois dérivable.

d. En utilisant la fonction $g(x) = x - 1 + e^{-x}$, étudier les variations de f.

e. Décrire le comportement de f au voisinage de 0. Tracer l'allure de sa courbe.

6 Soit $f(x) = xe^{x^2}$.

a. Démontrer que f réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b. Justifier que f^{-1} admet un développement limité à tout ordre en 0 et donner ce développement limité à l'ordre 5.

7 Calculer les limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\tan x - \tan(3x)}{x(1 - \cos(3x))}$

b. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(\operatorname{ch} x - \cos x) - 3(\operatorname{sh} x - \sin x)}{x^7}$

c. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$

d. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x}{\operatorname{sh} x} - \frac{e^{-x}}{\sin x}\right)$

e. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2} + \cos x - \frac{1}{2}\cos^2 x\right)^{\frac{1}{x^4}}$

f. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{1 - \cos 2x}\right)$

g. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos 2x - e^{-2x^2}}$

h. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \arcsin x}{\sin x - \arctan x}$

i. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\ln x}$

j. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{1 - 2\cos(2x)}$

k. $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{\cos 2x + \sin 4x}$

l. $\displaystyle\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$

m. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt[n]{x-1} - 1}$

n. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\pi - 3\arccos x}{4x^3 - x}$

o. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^3+7} - \sqrt{x^2+5}$

p. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt[5]{x^{10} + x^5 + 1} - x^2}{\sqrt[4]{x^4+1} + x}$

8 Déterminer le comportement asymptotique des fonctions suivantes en $\pm\infty$.

$f_1(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x + 1}$

$f_2(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1}$

$f_3(x) = \sqrt{(x-1)(x-3) + 2}$

$f_4(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{2(x-1)^2}$

$f_5(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 - x + 3}{x^2 + x + 1}$

$f_6(x) = \sqrt[3]{x^2(1-8x)}$

$f_7(x) = \sqrt[3]{8x^3 + x^2} - \sqrt{9x^2 + x}$

$f_8(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x}}$

$f_9(x) = x e^{\frac{1}{x+1}}$

$f_{10}(x) = \dfrac{(x+1)\ln(1+x)}{\ln x}$

$f_{11}(x) = \ln \operatorname{ch} x$

9 Donner un développement asymptotique à l'ordre k des suites suivantes.

$k = 2 \quad u_n = \dfrac{n-1}{2n-3}$

$k = 3 \quad v_n = \arctan n$

$k = 3 \quad w_n = \arctan\left(n + \dfrac{1}{n}\right)$

$k = 2 \quad x_n = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n}\right)$

$k = 2 \quad y_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

$k = 2 \quad z_n = \sqrt[n]{n^2 + 3n + 1}$

10 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$u_n = \prod_{k=2n}^{3n} k.$$

À l'aide de la formule de Stirling donner un équivalent simple de u_n en $+\infty$ puis de $\sqrt[n]{u_n}$.

On pourra considérer $\frac{u_n}{2n}$.