

Chapitre B10 Dimension

I. Dimension d'un espace vectoriel

A. Définition et existence

Définition. On dit qu'un espace vectoriel est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Lemme 1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, \mathcal{L} une famille libre finie de E , et \mathcal{G} une famille génératrice finie de E . Alors $\text{Card}(\mathcal{L}) \leq \text{Card}(\mathcal{G})$.

Démonstration. Soit $m = \text{Card}(\mathcal{L})$, $p = \text{Card}(\mathcal{G})$. On raisonne par l'absurde en supposant que $m > p$. On note :

$$\mathcal{L} = (v_1, \dots, v_m) \quad \text{et} \quad \mathcal{G} = (u_1, \dots, u_p)$$

Sous-lemme 1. Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq p - 1$. Supposons que la famille

$$\mathcal{G}_k = (v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_p)$$

est génératrice. Alors il est possible d'intervertir les vecteurs u_{k+1}, \dots, u_p de façon à ce que la famille

$$\mathcal{G}_{k+1} = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_p)$$

soit génératrice.

Démonstration du sous-lemme 1. Supposons que la famille \mathcal{G}_k est génératrice.

L'élément v_{k+1} existe car $k + 1 \leq p < m$. Il est élément de E , qui est engendré par la famille \mathcal{G}_k , donc il existe des scalaires $\lambda_1 \dots \lambda_k$ et $\mu_{k+1} \dots \mu_p$ tels que :

$$v_{k+1} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu_{k+1} u_{k+1} + \dots + \mu_p u_p$$

L'un des μ_j est non-nul, sinon on aurait

$$0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k - v_{k+1}$$

ce qui contredirait le fait que la famille (v_1, \dots, v_m) est libre.

Ainsi il existe un entier j tel que μ_j est non-nul. Quitte à intervertir les indices des u_j , on suppose que $\mu_{k+1} \neq 0$. On a alors :

$$u_{k+1} = -\frac{1}{\mu_{k+1}}(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k - v_{k+1} + \mu_{k+2} u_{k+2} + \dots + \mu_p u_p)$$

Ceci montre que u_{k+1} est combinaison linéaire des éléments de \mathcal{G}_{k+1} . Or les autres éléments de \mathcal{G}_k sont évidemment combinaisons linéaires des éléments de \mathcal{G}_{k+1} car ils appartiennent à cette famille. Ainsi $\mathcal{G}_k \subseteq \text{Vect}(\mathcal{G}_{k+1})$ et donc par propriété :

$$\text{Vect}(\mathcal{G}_k) \subseteq \text{Vect}(\mathcal{G}_{k+1})$$

Ceci donne $E \subseteq \text{Vect}(\mathcal{G}_{k+1})$, puis $E = \text{Vect}(\mathcal{G}_{k+1})$ car l'inclusion réciproque est évidente. Ainsi famille \mathcal{G}_{k+1} est génératrice de E . Le sous-lemme est démontré. \square

Suite de la démonstration du lemme 1. On pose $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$. Grâce au sous-lemme on peut intervertir les indices des éléments de \mathcal{G}_0 de façon à ce que la famille

$$\mathcal{G}_1 = (v_1, u_2, \dots, u_p)$$

soit génératrice. En appliquant encore plusieurs fois le sous-lemme on construit par récurrence finie une suite $(\mathcal{G}_k)_{1 \leq k \leq p}$ de familles génératrices de E .

Finalement, pour $k = p$, on obtient que la famille

$$\mathcal{G}_p = (v_1, \dots, v_p)$$

est génératrice. Or $m > p$, donc le vecteur v_{p+1} existe. Il est élément de E donc il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que :

$$v_{p+1} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$$

Ceci est impossible car la famille (v_1, \dots, v_m) est libre.

Cette contradiction montre que $m \leq p$. \square

Lemme 2. *Tout espace vectoriel de dimension finie possède une base.*

Démonstration. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit N l'ensemble des cardinaux de toutes les familles libres de E .

Alors N est une partie de \mathbb{N} . Elle est non vide car elle contient 0, puisque l'ensemble vide est une famille libre. Comme E est de dimension finie, alors il admet une famille génératrice, de cardinal m . D'après le lemme précédent, toute famille libre est de cardinal inférieur à m . Ceci montre que N est majorée.

Ainsi N est une partie non-vide et majorée de \mathbb{N} , donc elle admet un maximum, que l'on note n .

Comme $n \in N$ alors il existe une famille libre $\mathcal{L} = (e_1, \dots, e_n)$ d'éléments de E .

Le sous-lemme ci dessous montre que cette famille est une base de E , et donc E possède bien une base. \square

Sous-lemme 2. *Une famille libre maximale de E est une base de E .*

Remarque. Une famille libre \mathcal{L} est maximale si pour tout $u \in E$ la famille $\mathcal{L} \cup (u)$ est liée, *i.e.*, l'ajout de tout vecteur lui fait perdre sa liberté.

Dans le cas ci-dessus toute famille de la forme $\mathcal{L} \cup (u)$ est de cardinal $n + 1$. Comme n est la maximum de N alors la famille $\mathcal{L} \cup (u)$ ne peut être libre.

Démonstration du sous-lemme 2.

Théorème. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de E ont même cardinal.

Définition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On appelle dimension de E et on note $\dim E$ le cardinal de ses bases.

Démonstration. Si E est de dimension finie, alors d'après le lemme 2 il possède une base \mathcal{B} . Soit n le cardinal de cette base.

Soit \mathcal{B}' une autre base de E , et n' son cardinal. Comme \mathcal{B} est génératrice et \mathcal{B}' est libre, alors d'après le lemme 1 $n' \leq n$. Comme \mathcal{B} est libre et \mathcal{B}' est génératrice, alors toujours d'après le lemme 1 $n \leq n'$. Ainsi $n = n'$.

Finalement toutes les bases de E sont de cardinal n . □

B. Exemples

Exemples fondamentaux.

- (i) L'espace vectoriel \mathbb{R}^n est de dimension n , car la base canonique (e_1, \dots, e_n) est de cardinal n : $\dim \mathbb{R}^n = n$
- (ii) L'espace vectoriel $\{0\}$ est de dimension nulle, car la famille vide en est une base : $\dim \{0\} = 0$
- (iii) L'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n + 1$, car la famille $(X^k \mid 0 \leq k \leq n)$ en est une base.
- (iv) L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est de dimension np .
- (v) Les espaces vectoriels $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ne sont pas de dimension finie (démonstration pour $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ page 8).

Remarque. L'ensemble \mathbb{C} est :

- un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 1, de base (1),
- un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2, de base (1, i).

Ainsi la dimension d'un \mathbb{K} -espace vectoriel dépend du corps \mathbb{K} . On note donc parfois $\dim_{\mathbb{K}} E$ la dimension du \mathbb{K} -espace vectoriel E . Par exemple :

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$$

Définitions. Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé droite vectorielle, un espace vectoriel de dimension 2 est appelé plan vectoriel.

Exemples.

- (i) Soit I un intervalle, a une fonction continue. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène :

$$y'(t) - a(t)y(t) = 0$$

est une droite vectorielle de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

En effet cet ensemble est $\{\lambda y_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ où $y_0(t) = e^{A(t)}$ avec A une primitive de a . La fonction y_0 est bien non-nulle.

- (ii) Soit a, b, c trois réels, a étant non-nul. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

est un plan vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

En effet cet ensemble est de la forme $\{\alpha y_1 + \beta y_2 \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ où y_1 et y_2 sont, selon les cas :

$$\begin{aligned} & y_1(t) = e^{\lambda_1 t} & y_2(t) = e^{\lambda_2 t} & \text{avec } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \text{ou} & y_1(t) = e^{\lambda_0 t} & y_2(t) = te^{\lambda_0 t} \\ \text{ou} & y_1(t) = e^{ut} \cos vt & y_2(t) = e^{ut} \sin vt & \text{avec } v \neq 0 \end{aligned}$$

On vérifie dans chaque cas que la famille (y_1, y_2) est libre.

- (iii) Soit a, b, c trois scalaires, a étant non-nul. L'ensemble des suites vérifiant la relation de double-réurrence linéaire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

est un plan vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

En effet cet ensemble est de la forme $\{\alpha(v_n) + \beta(w_n) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ où les suites (v_n) et (w_n) sont, selon les cas :

$$\begin{aligned} & v_n = \lambda_1^n & w_n = \lambda_2^n & \text{avec } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \text{ou} & v_n = \lambda_0^n & w_n = n\lambda_0^n & \text{avec } \lambda_0 \neq 0 \end{aligned}$$

On vérifie dans chaque cas que la famille (v, w) est libre.

Proposition (dimension d'un produit). *Soit E et F deux espaces vectoriels sur K. Si E et F sont de dimensions finies alors E x F est de dimension finie, et :*

Exemple. Soit n et p deux entiers naturels. Alors il existe un isomorphisme naturel :

$$\begin{matrix}
 & & & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p & \longrightarrow & & & \\
 & & & \left((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_p) \right) & \longmapsto & & &
 \end{matrix}$$

Nous verrons qu'un isomorphisme conserve la dimension, ce qui justifie ici que :

$$\dim(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p) = n + p = \dim \mathbb{R}^n + \dim \mathbb{R}^p$$

Démonstration. On suppose que E et F sont de dimensions finies, que l'on note n et p. Alors E et F admettent des bases. On choisit une base (e1, ..., en) de E et une base (f1, ..., fp) de F.

On rappelle la définition :

$$E \times F = \{(u, v) \mid u \in E \quad v \in F\}$$

On définit la famille (gk)1 ≤ k ≤ n+p de vecteurs de E x F par :

$$g_1 = (e_1, 0_F) \quad \dots \quad g_n = (e_n, 0_F) \quad g_{n+1} = (0_E, f_1) \quad \dots \quad g_{n+p} = (0_E, f_p)$$

En d'autres termes :

$$\forall k = 1, \dots, n \quad g_k = (e_k, 0_F) \quad \text{et} \quad \forall j = 1, \dots, p \quad g_{n+j} = (0_E, f_j)$$

Démontrons que cette famille est libre et génératrice de E x F.

Premièrement, la famille (e1, ..., en) est génératrice de E et la famille (f1, ..., fp) est génératrice de F, donc :

$$\begin{aligned} E \times F &= \{(u, v) \mid u \in E \quad v \in F\} \\ &= \{(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, \mu_1 f_1 + \dots + \mu_p f_p) \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p\} \end{aligned}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
 E \times F &= \{(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, \lambda_{n+1} f_1 + \dots + \lambda_{n+p} f_p) \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+p}) \in \mathbb{K}^{n+p}\} \\
 &= \left\{ (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, 0_F) + (0_E, \lambda_{n+1} f_1 + \dots + \lambda_{n+p} f_p) \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+p}) \in \mathbb{K}^{n+p} \right\} \\
 &= \left\{ \lambda_1 (e_1, 0_F) + \dots + \lambda_n (e_n, 0_F) + \lambda_{n+1} (0_E, f_1) + \dots + \lambda_{n+p} (0_E, f_p) \mid \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+p}) \in \mathbb{K}^{n+p} \right\} \\
 &= \left\{ \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n + \lambda_{n+1} g_{n+1} + \dots + \lambda_{n+p} g_{n+p} \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+p}) \in \mathbb{K}^{n+p} \right\} \\
 &= \text{Vect}(g_1, \dots, g_n, g_{n+1}, \dots, g_{n+p})
 \end{aligned}$$

Ceci montre que la famille (gk)1 ≤ k ≤ n+p est génératrice de E x F.

Soit maintenant $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+p})$ des scalaires tels que :

$$\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n + \lambda_{n+1} g_{n+1} + \dots + \lambda_{n+p} g_{n+p} = 0_{E \times F}$$

Ceci donne :

$$(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, \lambda_{n+1} f_1 + \dots + \lambda_{n+p} f_p) = (0_E, 0_F)$$

On en déduit :

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0_E \quad \text{et} \quad \lambda_{n+1} f_1 + \dots + \lambda_{n+p} f_p = 0_F$$

Comme les familles (e_1, \dots, e_n) et (f_1, \dots, f_p) sont libres alors :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{n+p} = 0$$

La famille $(g_k)_{1 \leq k \leq n+p}$ est donc libre.

Elle est libre et génératrice de $E \times F$ donc c'est une base de $E \times F$, et comme elle contient $n + p$ éléments alors $E \times F$ est de dimension $n + p$. \square

Proposition (dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels).

Soit E_1, \dots, E_p une famille de p espaces vectoriels, où $p \in \mathbb{N}$.

Si tous les E_i sont de dimensions finies alors leur produit est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 \times \dots \times E_p) = \dim E_1 + \dots + \dim E_p$$

Corollaire. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et p un entier naturel. Alors l'espace vectoriel E^p est de dimension finie, et cette dimension est : $\dim(E^p) = p \dim E$*

Exemple. Comme \mathbb{K} est de dimension 1 sur \mathbb{K} , on retrouve : $\dim \mathbb{K}^n = n$.

C. Théorèmes

Théorème. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Alors :

- (i) Toute famille génératrice possède au moins n éléments.
- (ii) Toute famille libre possède au plus n éléments.
- (iii) Si \mathcal{G} est une famille génératrice possédant n éléments alors \mathcal{G} est une base.
- (iv) Si \mathcal{L} est une famille libre possédant n éléments alors \mathcal{L} est une base.

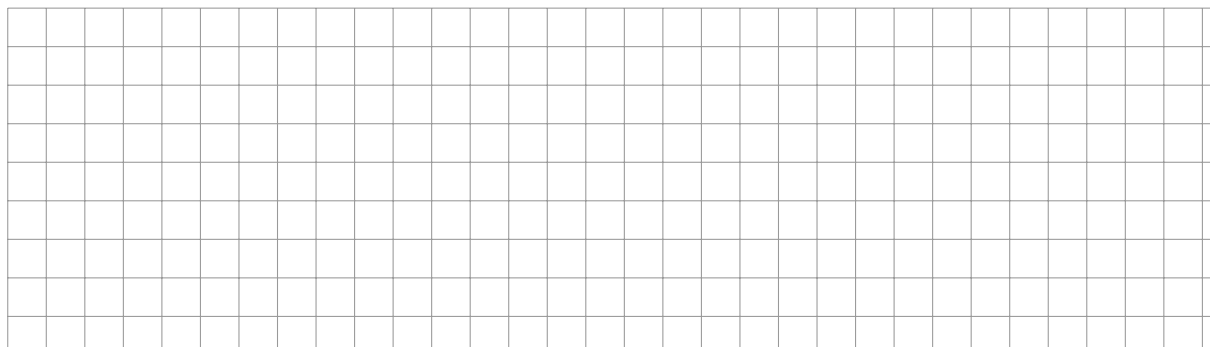
Remarque. On résume les propriétés (iii) et (iv) en disant que toute famille génératrice minimale est une base, et toute famille libre maximale est une base.

Démonstration. Soit \mathcal{B} une base de E . Alors $\text{Card } \mathcal{B} = \dim E = n$.

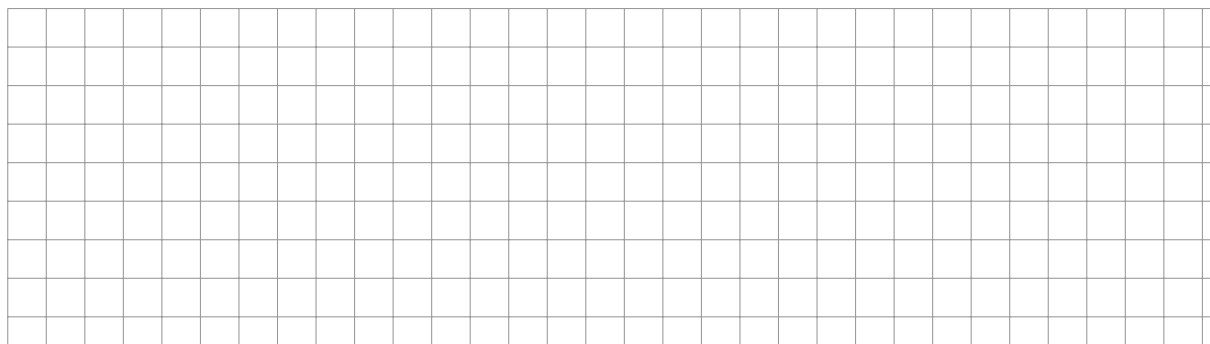
- (i) Soit \mathcal{G} une famille génératrice. Comme la famille \mathcal{B} est libre alors $\text{Card } \mathcal{B} \leq \text{Card } \mathcal{G}$ d'après le lemme 1. La famille \mathcal{G} possède donc au moins n éléments.
- (ii) Soit \mathcal{L} une famille libre. Comme la famille \mathcal{B} est génératrice alors $\text{Card } \mathcal{L} \leq \text{Card } \mathcal{B}$ d'après le lemme 1. La famille \mathcal{L} possède donc au plus n éléments.
- (iii) Soit \mathcal{G} une famille génératrice de cardinal n . Si \mathcal{G} n'est pas libre alors l'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres, et donc la famille \mathcal{G} privée de cet élément est génératrice. Or elle est de cardinal $n - 1$, ce qui contredit le (i). Ainsi la famille \mathcal{G} est libre, et donc c'est une base de E .
- (iv) Soit \mathcal{L} une famille libre de cardinal n . Alors \mathcal{L} est libre maximale donc d'après le sous-lemme 2 elle est une base de E . \square

Exemple 1.

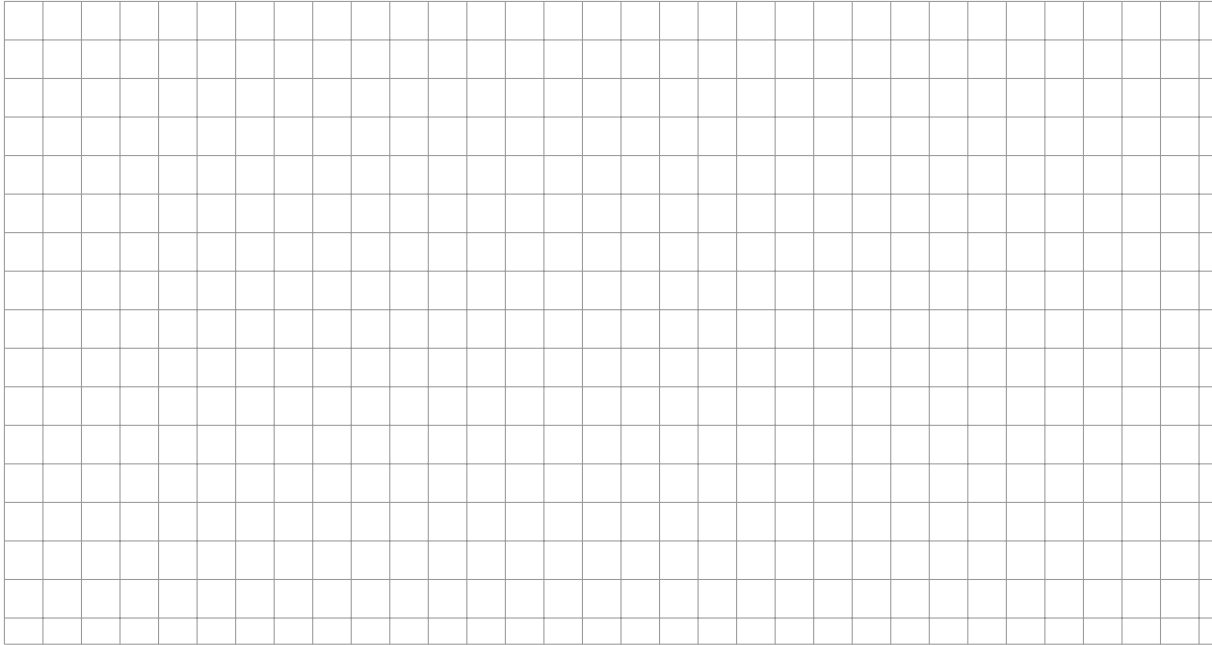
- (i) Soit $u_1 = (2, 1)$ et $u_2 = (1, 2)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^2 .
Alors la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 .



- (ii) La famille $\left((X - 3)^k \mid k = 0 \dots n \right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.



(iii) L'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas de dimension finie.



Théorème de la base extraite. *De toute famille génératrice finie d'un espace vectoriel on peut extraire une base.*

Démonstration. Si une famille génératrice finie n'est pas libre, alors un de ses éléments est combinaison linéaire des autres, donc la famille privée de cet élément reste génératrice.

On peut retirer des éléments tant que la famille est liée, elle reste génératrice. On obtient finalement une famille libre et génératrice, donc une base. \square

Théorème de la base incomplète. *Toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée en une base.*

Démonstration. Soit $\mathcal{L} = (v_1, \dots, v_m)$ une famille libre de E , espace vectoriel de dimension finie n . Comme E est de dimension finie alors il admet une base. Soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E .

Alors \mathcal{B} est une famille génératrice de E . Par récurrence finie, en appliquant le sous-lemme 1 on obtient que, quitte à intervertir les éléments de \mathcal{B} , la famille

$$\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_m, u_{m+1}, \dots, u_n)$$

est génératrice de E . Comme elle est de cardinal n , d'après la propriété (iii) du théorème ci-dessus c'est une base de E .

La famille \mathcal{L} a bien été complétée en une base de E . \square

Remarque. On a démontré que de plus la famille libre peut être complétée en choisissant des vecteurs dans une famille génératrice donnée.

Définition. Dans la situation du (ii) on dit que la base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_p)$ est adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$.

Démonstration.

(i) Comme F est un sous-espace vectoriel de E et E est de dimension finie, alors F est de dimension finie, et donc F admet une base.

Soit (u_1, \dots, u_m) une base de F . Alors cette famille est une famille libre de E . D'après le théorème de la base incomplète il existe une famille (v_1, \dots, v_p) telle que la famille $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_p)$ est une base de E . On note :

$$G = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$$

Démontrons que $E = F \oplus G$. Premièrement :

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}(u_1, \dots, u_m) + \text{Vect}(v_1, \dots, v_p) \\ &= \text{Vect}((u_1, \dots, u_m) \cup (v_1, \dots, v_p)) \\ &= \text{Vect}(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_p) \\ &= E \end{aligned}$$

Deuxièmement, si u est un élément de $F \cap G$ alors il existe deux familles $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ et (μ_1, \dots, μ_p) de scalaires tels que :

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_p v_p$$

Ceci montre que :

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m + (-\mu_1) v_1 + \dots + (-\mu_p) v_p = 0_E$$

La famille \mathcal{B} est libre donc les scalaires λ_i et μ_j sont tous nuls. Ainsi $u = 0_E$.

Ceci montre que $F \cap G = \{0_E\}$.

Finalement nous avons démontré que $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$, donc par propriété $E = F \oplus G$: les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires.

(ii) On note $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_p)$. Démontrons que cette famille est libre.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_p)$ des scalaires tels que :

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_p v_p = 0_E$$

Alors :

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m = -\mu_1 v_1 - \dots - \mu_p v_p$$

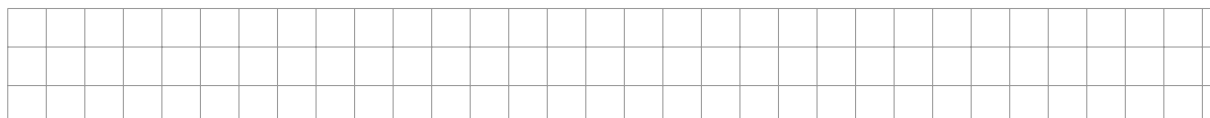
Ce vecteur est élément de F et de G , donc il est nul, car F et G sont en somme directe. Ainsi, les familles (u_1, \dots, u_m) et (v_1, \dots, v_p) étant libres, tous les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_p$ sont nuls, et la famille \mathcal{B} est libre.

Démontrons que \mathcal{B} est génératrice.



D. Rang d'une famille de vecteurs

Définition. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E . On appelle rang de \mathcal{F} et on note $\text{rg } \mathcal{F}$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par \mathcal{F} .



Exemple 2. Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $\mathcal{F} = ((1, 1, 0, 0), (2, 1, 1, 1), (0, -1, 1, 1))$.

Proposition. Soit \mathcal{F} une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n .

Alors :

- (i) $\text{rg } \mathcal{F} \leq p$. L'égalité a lieu si et seulement si \mathcal{F} est libre.
- (ii) $\text{rg } \mathcal{F} \leq n$. L'égalité a lieu si et seulement si \mathcal{F} est génératrice de E .

Corollaire. Une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n est une base de E si et seulement si elle est de rang n .

Démonstration. On note $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$. Alors $\text{rg } \mathcal{F} = \dim F$.

(i) La famille \mathcal{F} est génératrice de F donc $\dim F \leq \text{Card } \mathcal{F}$, puis $\text{rg } \mathcal{F} \leq p$.

Si $\text{rg } \mathcal{F} = p$ alors la famille \mathcal{F} est une famille génératrice de F de cardinal $p = \dim F$, donc par théorème c'est une base de F . Elle est donc libre.

Réciproquement si la famille \mathcal{F} est libre alors elle est une base de F , donc $\text{rg } \mathcal{F} = \dim F = \text{Card } \mathcal{F} = p$.

(ii) Comme F est un sous-espace vectoriel de E alors $\dim F \leq \dim E$, donc $\text{rg } \mathcal{F} \leq n$.

Le rang de \mathcal{F} est égal à n si et seulement si $\dim F = \dim E$, ce qui équivaut à $F = E$ puisque $F \subseteq E$. Or $F = E$ si et seulement si \mathcal{F} est génératrice de E . \square

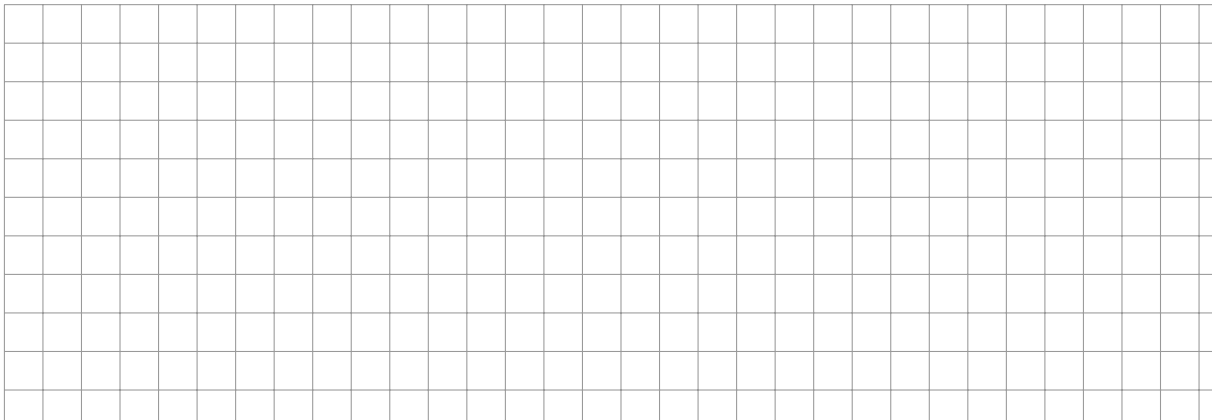
▷ **Exercice 2.**

III. Applications linéaires en dimension finie

A. Image d'une base

On suppose dans cette partie que E est de dimension finie.

Remarque. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, et $\mathcal{G} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille génératrice de E . Alors la famille $f(\mathcal{G}) = (f(u_1), \dots, f(u_p))$ est une famille de vecteurs de F . Elle est génératrice de $\text{im } f$:



En particulier, si \mathcal{B} est une base de E alors $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de $\text{im } f$.

Proposition (Image d'une base). Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, et \mathcal{B} une base de E . Alors

- (i) La famille $f(\mathcal{B})$ est libre si et seulement si f est injective.
- (ii) La famille $f(\mathcal{B})$ est génératrice de F si et seulement si f est surjective.
- (iii) La famille $f(\mathcal{B})$ est une base de F si et seulement si f est bijective.

Remarque. En particulier, un isomorphisme envoie une base sur une base.

Démonstration. Le (ii) est évident en vertu de la remarque ci-dessus, et le (iii) est conséquence de (i) et (ii). Il suffit donc de démontrer le (i).

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.



Théorème. Soit E et F deux espaces vectoriels, E étant de dimension finie.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , et (v_1, \dots, v_p) une famille de p vecteurs de F .

Alors il existe une et une seule application linéaire $f : E \rightarrow F$ telle que :

$$\forall i = 1 \dots p \quad f(e_i) = v_i$$

Remarque. En conséquence :

Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base.

Si on connaît l'image d'une base par une application linéaire alors on peut connaître l'image de tout élément.

Exemple 4.

(i) Soit $f : E \rightarrow F$. Alors $\operatorname{rg} f = 0$ si et seulement si f est l'application nulle.

(ii) Soit $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$
 $(x_1, \dots, x_5) \mapsto (x_1, x_2, 0, 0)$

Alors $\operatorname{rg} f = 2$.

Proposition. Avec les hypothèses de la définition ci-dessus, $\operatorname{rg} f \leq \dim E$. Si de plus F est de dimension finie alors $\operatorname{rg} f \leq \dim F$.

Démonstration. Soit \mathcal{B} une base de E . Alors $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f(\mathcal{B})$. Or $f(\mathcal{B})$ est de cardinal $p = \dim E$, donc $\operatorname{rg} f(\mathcal{B}) \leq p$.

Supposons que F est de dimension finie n . Comme $\operatorname{im} f$ est un sous-espace vectoriel de F alors $\dim(\operatorname{im} f) \leq n$, donc $\operatorname{rg} f \leq n$. \square

Proposition. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, où E et F sont deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n . Alors :

- (i) f est injective si et seulement si $\operatorname{rg} f = p$
- (ii) f est surjective si et seulement si $\operatorname{rg} f = n$
- (iii) f est bijective si et seulement si $\operatorname{rg} f = n = p$.

Démonstration. Soit \mathcal{B} une base de E .

(i) Par équivalences :

$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\iff f(\mathcal{B}) \text{ est libre} \\ &\iff \operatorname{rg} f(\mathcal{B}) = \operatorname{Card} f(\mathcal{B}) = \operatorname{Card} \mathcal{B} = \dim E = p \end{aligned}$$

En effet nous avons démontré que :

- f est injective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est libre pour toute base \mathcal{B}
- pour toute famille \mathcal{F} d'éléments de E , \mathcal{F} est libre si et seulement si $\operatorname{rg} \mathcal{F} = \operatorname{Card} \mathcal{F}$
- pour toute base \mathcal{B} de E , $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f(\mathcal{B})$.

(ii) Ensuite :

$$\begin{aligned} f \text{ surjective} &\iff f(\mathcal{B}) \text{ est génératrice de } F \\ &\iff \operatorname{rg} f(\mathcal{B}) = \dim F = n. \end{aligned}$$

En effet nous savons que :

- f est surjective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est génératrice de F pour toute base \mathcal{B} de E
- pour toute famille \mathcal{F} d'éléments de F , \mathcal{F} est génératrice de F si et seulement si $\operatorname{rg} \mathcal{F} = \dim F$
- pour toute base \mathcal{B} de E , $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f(\mathcal{B})$.

(iii) Cette propriété découle immédiatement des deux précédentes. \square

Proposition. Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications linéaires. Alors :

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \text{Min}(\text{rg } g, \text{rg } f)$$

Démonstration. L'image de $g \circ f$ est incluse dans celle de g :

$$\text{im}(g \circ f) \subseteq \text{im } g$$

donc :

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg } g$$

Soit maintenant \mathcal{B} une base de $\text{im } f$. La famille $g(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de $g(\text{im } f) = \text{im}(g \circ f)$, donc :

$$\dim \text{im}(g \circ f) \leq \text{Card } g(\mathcal{B}) = \text{Card } \mathcal{B} = \dim \text{im } f$$

Ceci donne :

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg } f$$

Finalement on obtient le résultat voulu :

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \text{Min}(\text{rg } g, \text{rg } f) \quad \square$$

C. Isomorphismes en dimension finie

Définition. Deux espaces vectoriels E et F sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme $\varphi : E \rightarrow F$.

Remarque. La relation d'isomorphisme est une *relation d'équivalence*. En effet elle est :

- *réflexive* : E est isomorphe à lui-même
- *symétrique* : si E est isomorphe à F alors F est isomorphe à E
- *transitive* : si E est isomorphe à F et F est isomorphe à G alors E est isomorphe à G .

Proposition. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim F$.

Démonstration. Si E et F sont isomorphes, alors il existe un isomorphisme $\varphi : E \rightarrow F$. D'après la propriété «image d'une base» page 14 l'image d'une base par un isomorphisme est une base donc E et F ont même dimension.

Supposons que E et F ont même dimension. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F .

Comme \mathcal{B} est une base de E et \mathcal{B}' est une famille de n vecteurs de F alors par théorème il existe une unique application linéaire φ telle que :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \varphi(e_i) = f_i$$

L'image par φ de la base \mathcal{B} de E est une base de F donc φ est un isomorphisme, encore d'après la propriété «image d'une base». Ainsi E et F sont isomorphes. \square

Exemple 5. Les espaces vectoriels \mathbb{R}^n , $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$ sont isomorphes. En effet, les applications

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1 \ \cdots \ x_n)$$

sont linéaires et bijectives, donc ce sont des isomorphismes.

Lemme. Soit $\varphi : E \rightarrow F$ un isomorphisme. Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E . Alors $\dim \varphi(E_1) = \dim E_1$.

En d'autres termes la dimension est invariante par isomorphisme.

Démonstration. Notons $F_1 = \varphi(E_1)$. Alors la restriction de φ à E_1 est à valeurs dans F_1 , donc l'application

$$\begin{aligned} \psi : E_1 &\longrightarrow F_1 \\ u &\longmapsto \varphi(u) \end{aligned}$$

est bien définie.

De plus elle est injective car φ l'est : si $\psi(u) = 0_F$ alors $\varphi(u) = 0_F$ et donc $u = 0_{E_1}$.

Elle est surjective par définition de F_1 .

Finalement ψ est bijective, donc les dimensions de E_1 et de F_1 sont égales. \square

Proposition. Soit D, E, F, G quatre espaces vectoriels, et soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

(i) Si $\varphi : D \rightarrow E$ est un isomorphisme, alors $\text{rg}(f \circ \varphi) = \text{rg } f$.

(ii) Si $\psi : F \rightarrow G$ est un isomorphisme, alors $\text{rg}(\psi \circ f) = \text{rg } f$.

En d'autres termes le rang d'une application linéaire est invariant par composition avec un isomorphisme.

Démonstration.

(i) Comme φ est bijective alors $\varphi(D) = E$, donc $f \circ \varphi(D) = f(E)$ puis $\text{im}(f \circ \varphi) = \text{im } f$ donc $\text{rg}(f \circ \varphi) = \text{rg } f$.

(ii) Comme ψ est un isomorphisme, alors $\text{im } f$ et $\psi(\text{im } f)$ sont de même dimension.

Or $\psi(\text{im } f) = \text{im}(\psi \circ f)$, donc $\text{rg } f = \text{rg}(\psi \circ f)$. \square

D. Théorème du rang

Théorème du rang. Soit E et F étant deux espaces vectoriels, E étant de dimension finie. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors :

Lemme. On conserve les hypothèses du théorème. Soit E' un supplémentaire du noyau de f dans E : $E = E' \oplus \ker f$. Alors l'application

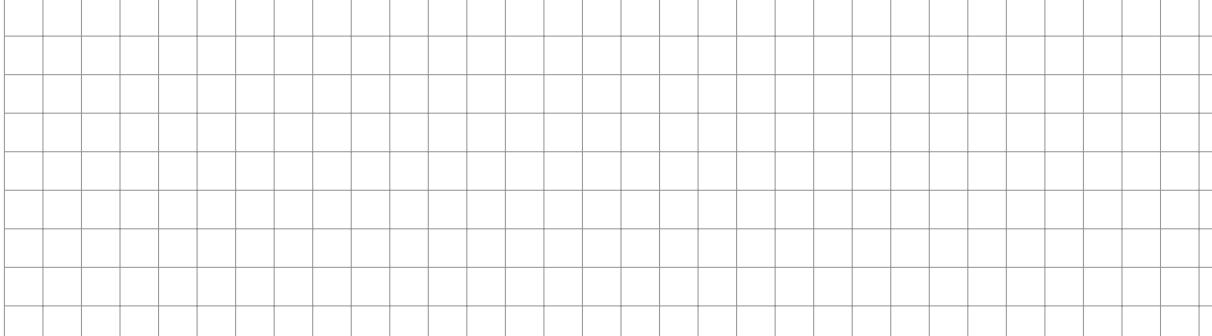
$$\begin{aligned} g : E' &\longrightarrow \text{im } f \\ u &\longmapsto f(u) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

<u>Démonstration.</u>																			
																			T. S. V. P.



Démonstration du théorème. On garde les notations du lemme précédent.

**Exemple 6.**

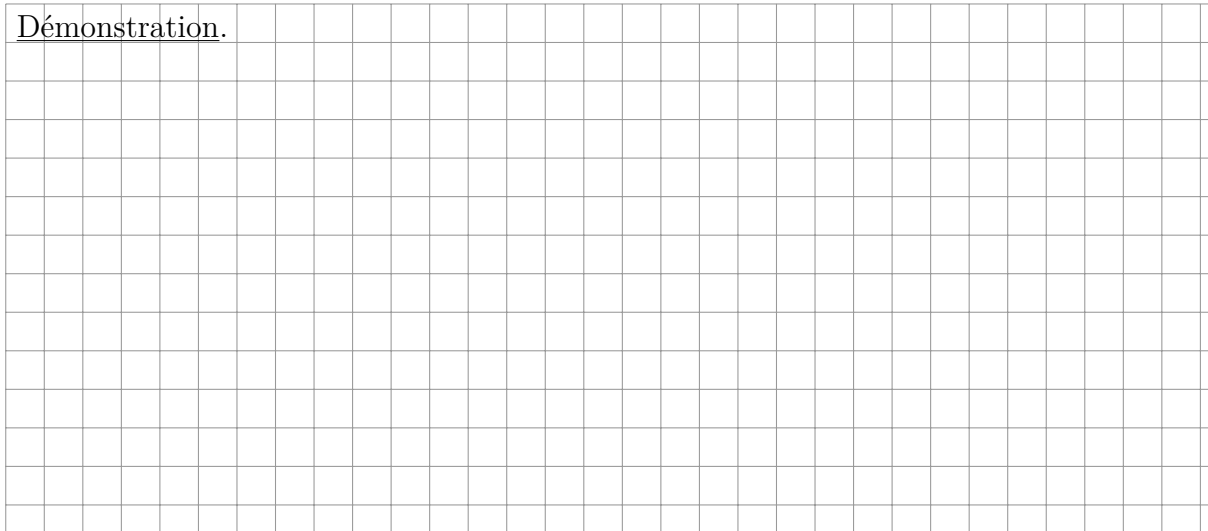
- (i) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire injective. Alors $\text{rg } f = 2$.
- (ii) Soit n et p deux entiers, et $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Si f est injective alors $p \leq n$, si f est surjective alors $p \geq n$.

▷ **Exercice 4.**

Corollaire. Soit E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie, et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

- (i) Si f est injective alors f est bijective.
- (ii) Si f est surjective alors f est bijective.

Démonstration.



Corollaire. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors f est injective si et seulement si f est surjective (et donc dans ce cas f est bijective).

Remarque. Dans les deux cas ci-dessus, i.e., si la dimension de l'espace de départ est égale à celle de l'espace d'arrivée :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est bijective} \iff f \text{ est surjective}$$

Exemple 7. Soit n un entier strictement positif, et soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des scalaires deux à deux distincts.

a. Démontrer que l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}_{n-1}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ P &\longmapsto (P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

b. Justifier que pour tous scalaires β_1, \dots, β_n il existe un et un seul polynôme P de degré au plus $n - 1$ tel que pour tout $i = 1, \dots, n$: $P(\alpha_i) = \beta_i$

E. Application aux hyperplans

Rappel. Soit E un espace vectoriel.

- (i) Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non-nulle.
- (ii) Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement s'il existe une droite vectorielle supplémentaire de H dans E .

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .

Les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de dimension $n - 1$.

Corollaire. Soit n et p deux entiers strictement positifs.

Alors l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues est de dimension au moins $p - n$.

Démonstration. Un hyperplan de \mathbb{K}^n est un ensemble d'équation :

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

où a_1, \dots, a_n sont des scalaires non tous nuls.

Soit S_0 un système linéaire de n équations à p inconnues.

Chaque ligne de ce système définit un hyperplan de \mathbb{K}^p . L'ensemble des solutions est alors l'intersection de n hyperplans de \mathbb{K}^p , donc il est de dimension au moins $p - n$. \square

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - m$, où $m \in \{0, \dots, n\}$.

Alors il existe m hyperplans de E dont F est l'intersection.

Démonstration. Soit (e_1, \dots, e_{n-m}) une base de F . Cette famille est libre donc d'après le théorème de la base incomplète il existe des vecteurs (e_{n-m+1}, \dots, e_n) la complétant en une base de E . On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ cette base.

Pour tout k allant de $n - m + 1$ à n on définit la famille \mathcal{B}_k contenant tous les e_i sauf e_k :

$$\forall k = n - m + 1, \dots, n \quad \mathcal{B}_k = \mathcal{B} \setminus \{e_k\}$$

Enfin on note H_k le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille \mathcal{B}_k .

Comme la famille \mathcal{B} est libre alors toutes les familles \mathcal{B}_k sont libres. Chacune est donc une base de H_k . Or elles contiennent $n - 1$ vecteurs, donc les H_k sont de dimension $n - 1$, et ce sont des hyperplans de E .

Démontrons que F est l'intersection des H_k .

Soit u un vecteur de E , de coordonnées $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dans la base \mathcal{B} . Alors u appartient à H_k si et seulement si sa coordonnée selon e_k est nulle :

$$\forall k = n - m + 1, \dots, n \quad u \in H_k \iff \lambda_k = 0_{\mathbb{K}}$$

Le sens indirect de cette équivalence est évident. Pour le sens direct : si $u \in H_k$ alors il existe des scalaires μ_1, \dots, μ_n tels que $u = \mu_1e_1 + \cdots + \mu_n e_n$ avec $\mu_k = 0$, donc par unicité des coordonnées dans la base \mathcal{B} on en déduit $\lambda_k = 0$.

Ceci montre que :

$$\begin{aligned} \forall u \in E \quad u \in \bigcap_{k=n-m+1}^n H_k &\iff \lambda_{n-m+1} = \cdots = \lambda_n = 0 \\ &\iff u \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-m}) = F \end{aligned}$$

Ainsi F est l'intersection des hyperplans H_{n-m+1}, \dots, H_n , lesquels sont bien au nombre de m . \square